Προβλήματα βελτιστοποίησης της ροής

Βελτιστοποίηση δικτύων

18 Νοεμβρίου 2022

Το πρόβλημα της ροής ελαχίστου κόστους

$$\text{minimise} \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

με τους περιορισμούς

$$\sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji} = s_i, \forall i \in \mathcal{N} \tag{2}$$

και

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij}, \forall (i,j) \in \mathcal{A} \tag{3}$$

όπου
a_{ij} το κόστος της ακμής (i,j),
b_{ij}, c_{ij} το κάτω και το άνω όριο ροής στην (i,j),
s_i η παροχή του κόμβου i.
Ο περιορισμός (2) λέγεται περιορισμός διατήρησης της ροής.
Ο περιορισμός (3) λέγεται περιορισμός χωρητικότητας.

Το πρόβλημα της ελάχιστης διαδρομής

Ας υποτεθεί ότι σε κάθε ακμή (i, j) ενός προσανατολισμένου γράφου αντιστοιχεί μονόμετρο κόστος a_{ij} και ότι το κόστος μιας εμπρόσθιας διαδρομής ορίζεται ως το συνολικό κόστος των ακμών του.
Περιστάσεις όπου έχει πρακτική εφαρμογή το πρόβλημα:

- Σε δίκτυο υπολογιστών το κόστος a_{ij} μπορεί να αντιστοιχεί στη μέση καθυστέρηση ενός πακέτου από τον κόμβο i στον κόμβο j. Ζητούμενη είναι η διαδρομή που εξασφαλίζει την ελάχιστη συνολικά μέση καθυστέρηση.
- Σε τηλεπικοινωνιακό δίκτυο, όπου η πιθανότητα να λειτουργεί η ζεύξη (i, j) είναι ίση με p_{ij}, μπορεί να υπολογισθεί η πιο αξιόπιστη διαδρομή μεταξύ δύο κόμβων εφόσον τεθεί $a_{ij} = -\ln p_{ij}$

Αναγωγή του προβλήματος της ελάχιστης διαδρομής σε πρόβλημα ελάχιστης ροής I

Το πρόβλημα της εύρεσης ελάχιστης διαδρομής μεταξύ κόμβων s και t μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\min \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij}x_{ij}$$

με τους περιορισμούς

$$\sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = s \\ -1 & \text{αν } i = t \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{4}$$

και

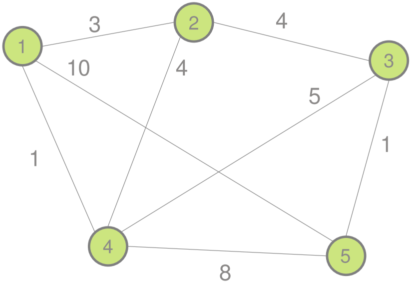
$$\forall (i,j) \in \mathcal{A} : x_{ij} \geq 0$$

Αναγωγή του προβλήματος της ελάχιστης διαδρομής σε πρόβλημα ελάχιστης ροής II

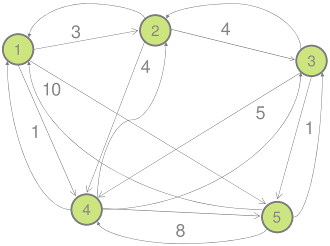
- Να παρατηρήσετε ότι αν για την εμπρόσθια διαδρομή P από τον s στον t ορισθεί ένα διάνυσμα ροής x με συνιστώσες δοσμένες x_{ij} τέτοιες, ώστε $x_{ij} = 1$ αν το (i, j) ανήκει στην P και $x_{ij} = 0$ αλλιώς, το x είναι δυνατή λύση για το παραπάνω πρόβλημα και το κόστος του x είναι ίσο με το μήκος της P.
- Επομένως αν το διάνυσμα x είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος, η αντίστοιχη διαδρομή είναι ελάχιστη.
- Αντίστροφα, το θέμα είναι κατά πόσο η επίλυση του προβλήματος δίνει τέτοιο διάνυσμα, δηλ. με ιδιότητες $x_{ij} = 1$ ή -1 ή 0 κ.λπ. ώστε να προσδιορίζει την ελάχιστη διαδρομή. Αποδεικνύεται ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει για προβλήματα ροής ελάχιστου κόστους με παροχές κόμβων και όρια στη ροή των ακμών.

Παράδειγμα:

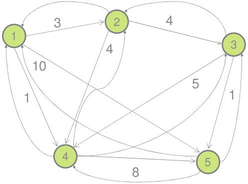
Δίνεται ο παρακάτω μη προσανατολισμένος γράφος στον οποίο πρέπει να υπολογισθεί η ελάχιστη διαδρομή μεταξύ των κόμβων 1 και 5 με τη μέθοδο της ροής ελαχίστου κόστους.



Για τους σκοπούς του προβλήματος κατασκευάζουμε προσανατολισμένο γράφο με δύο προσανατολισμένες ακμές (i, j) και (j, i) για κάθε ακμή μεταξύ των κόμβων i και j του αρχικού. Η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση είναι



$$
\begin{aligned}
z &= 3(x_{12} + x_{21}) + \\
&+ 4 * (x_{23} + x_{32}) + \\
&+ 4 * (x_{24} + x_{42}) + \\
&+ 10(x_{15} + x_{51}) + \\
&+ (x_{14} + x_{41}) + \\
&+ 8(x_{45} + x_{54}) + \\
&+ 5(x_{34} + x_{43}) + \\
&+ (x_{35} + x_{53})
\end{aligned}
$$

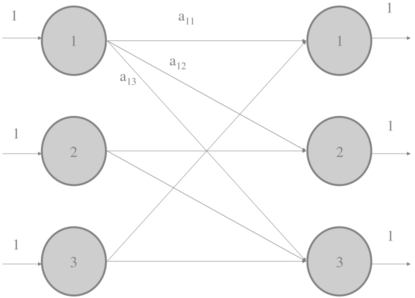


Οι περιορισμοί είναι

$$\begin{aligned}
x12 - x21 + x15 - x51 + x14 - x41 &= 1 \\
-x12 + x21 + x24 - x42 + x23 - x32 &= 0 \\
-x23 + x32 + x34 - x43 + x35 - x53 &= 0 \\
-x14 + x41 - x24 + x42 - x34 + x43 + x45 - x54 &= 0 \\
-x45 + x54 - x35 + x53 - x15 + x51 &= -1
\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα είναι $x_{14} = x_{43} = x_{35} = 1$ ενώ οι άλλες μεταβλητές παίρνουν την τιμή 0.
Ας σημειωθεί ότι ο προφανής περιορισμός $x_{ij} + x_{ji} = 1$ δεν είναι απαραίτητος για να επιτευχθεί η ορθή λύση.

Το πρόβλημα της αντιστοίχισης



- Δίνονται n άτομα και n αντικείμενα προς αντιστοίχιση 1 προς 1.
- Είναι a_{ij} το όφελος από την αντιστοίχιση του ατόμου i στο αντικείμενο j.
- Η αντιστοίχιση του ατόμου i στο αντικείμενο j μπορεί να γίνει μόνο αν το (i, j) ανήκει στο δεδομένο σύνολο ζευγών $\mathcal{A}$.

Το πρόβλημα της αντιστοίχισης ως πρόβλημα ροής

$$\max \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij}x_{ij} \tag{5}$$

με τους περιορισμούς

$$\sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} = 1, \forall i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

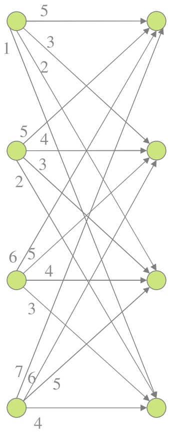
$$\sum_{\{i|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} = 1, \forall j = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

και

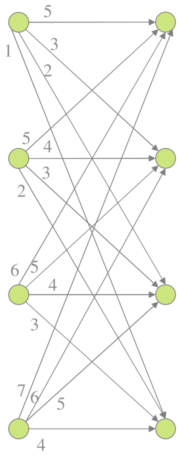
$$0 \le x_{ij} \le 1, \forall (i,j) \in \mathcal{A} \tag{8}$$

Αν υπάρχει δυνατή λύση, υπάρχει και βέλτιστη λύση με τιμές των x_{ij} ίσες με 0 ή 1.

Παράδειγμα:



Δίνεται ο διπλανός προσανατολισμένος γράφος του προβλήματος αντιστοίχισης. Να υπολογισθεί η βέλτιστη αντιστοίχιση διατυπώνοντας το πρόβλημα ως πρόβλημα μέγιστης ροής.



Η προς μεγιστοποίηση συνάρτηση είναι:

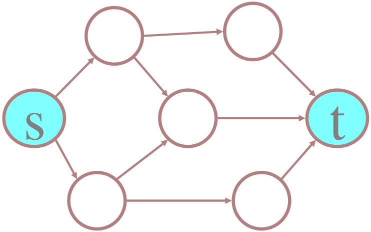
$$\begin{aligned} f(x) &= 5*x_{11}+3*x_{12}+2*x_{13}+x_{14}+ \\ &+ 5*x_{21}+4*x_{22}+3*x_{23}+2*x_{24}+ \\ &+ 6*x_{31}+5*x_{32}+4*x_{33}+3*x_{34}+ \\ &+ 7*x_{41}+6*x_{42}+5*x_{43}+4*x_{44}) \end{aligned}$$

Οι περιορισμοί είναι:

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &= 1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &= 1 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &= 1 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} &= 1 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} &= 1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} &= 1 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} &= 1 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} &= 1 \end{aligned}$$

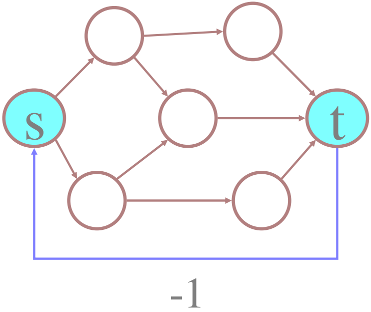
Λύση: $x_{11} = x_{24} = x_{33} = x_{42} = 1, f = 17.$

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής μεταξύ δύο κόμβων



Δεδομένων δύο κόμβων s (πηγή) και t (καταβόθρα ή προορισμός) ο στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η απόκλιση του κόμβου s, ενώ οι αποκλίσεις όλων των άλλων κόμβων παραμένουν μηδενικές.

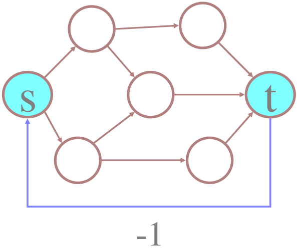
Το πρόβλημα της μέγιστης ροής μεταξύ δύο κόμβων ως πρόβλημα ελάχιστης ροής



Θέτουμε κόστος 0 σε όλες τις ακμές και εισάγουμε μια τεχνητή ακμή (t, s) με κόστος -1.

$$\min -x_{ts} \tag{9}$$

με τους περιορισμούς



$$\sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} = 0, \tag{10}$$

$$\forall i \in \mathcal{N} : i \neq s, i \neq t,$$

$$\sum_{\{j|(s,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} = \sum_{\{i|(i,t)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} = x_{ts}, \tag{11}$$

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij}, \forall (i,j) \in \mathcal{A} : (i,j) \neq (t,s) \tag{12}$$

Το πρόβλημα της μεταφοράς

Δίνεται γράφος όπως στο πρόβλημα της αντιστοίχισης και η συνάρτηση κόστους $\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij}x_{ij}$ προς ελαχιστοποίηση, αλλά με τους γενικότερους περιορισμούς

$$\sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} = a_i, \forall i = 1,\ldots,m \qquad \sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} = b_j, \forall j = 1,\ldots,n$$

Ο επόμενος περιορισμός μπορεί να τεθεί, αλλά η δεξιά πλευρά δεν είναι απαραίτητη:

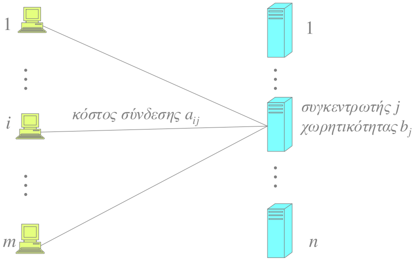
$$0 \le x_{ij} \le \min\{a_i, b_j\}, \forall (i,j) \in \mathcal{A}$$

Για να είναι εφικτή η ροή πρέπει

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Βέβαια ισχύουν και οι περιορισμοί ροής ανά ακμή.

Παράδ.: Σύνδεση m τερματικών σε n συγκεντρωτές I



$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \tag{13}$$

με τους περιορισμούς (α) κάθε τερματικό να συνδέεται ακριβώς με ένα συγκεντρωτή

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i = 1, \ldots, m \tag{14}$$

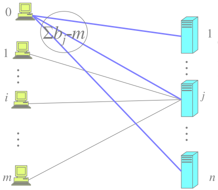
Παράδ.: Σύνδεση m τερματικών σε n συγκεντρωτές II

και (β) κάθε συγκεντρωτής να μη ξεπερνάει τη χωρητικότητά του

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j, \forall j = 1, \ldots, n \qquad (15)$$

Ωστόσο το πρόβλημα δεν είναι ακόμη πρόβλημα μεταφοράς επειδή (1) οι ροές είναι υποχρεωμένες να είναι 1 ή 0 και (2) επειδή οι περιορισμοί (15) είναι ανισωτικοί.
Το πρόβλημα (1) μπορεί να αμεληθεί επειδή τελικά και σ' αυτήν την περίπτωση ακόμη και αν χαλαρωθεί ο περιορισμός για δίτιμες μεταβλητές, υπάρχει βέλτιστη λύση με τέτοιο αποτέλεσμα.

Παράδ.: Σύνδεση m τερματικών σε n συγκεντρωτές III



Το πρόβλημα των ανισωτικών περιορισμών διορθώνεται με ένα τερματικό, που συνδέεται με περισσότερους του ενός κόμβους, δηλαδή έχει

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - m$$

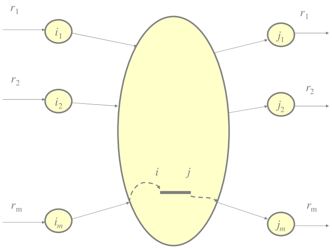
συνδέσεις με συγκεντρωτές με μηδενικό κόστος σύνδεσης. Για το τερματικό αυτό ισχύει ο περιορισμός

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j} = \sum_{j=1}^{n} b_j - m$$

ενώ οι ανισωτικοί περιορισμοί $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j$ αντικαθίστανται από τους

$$x_{0j} + \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

Προβλήματα ταυτόχρονης ροής διαφορετικών αγαθών (multicommodity flow problems)



Διαφορετικοί τύποι ροής μεταφέρονται μέσα από το ίδιο δίκτυο και εμφανίζουν αμοιβαία αλληλεπίδραση

- είτε επειδή μοιράζονται τους ίδιους αγωγούς
- είτε επειδή συμπλέκονται μέσω της αντικειμενικής συνάρτησης.

Παράδειγμα: Δρομολόγηση σε δίκτυα υπολογιστών I

Σκοπός είναι στο σχήμα της προηγούμενης διαφάνειας να γίνει δρομολόγηση κάθε ροής ξεχωριστά που φεύγει από τον κόμβο-πηγή i_k στον κόμβο-προορισμό j_k, $(k = 1, 2, \ldots, m)$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος.

- Αν $x_{ij}(k)$ είναι η ροή τύπου k στο κανάλι (i, j), πρέπει να ισχύει για κάθε $k = 1, 2, \ldots, m$

$$\sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij}(k) - \sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji}(k) =$$
$$= \begin{cases} r_k & \text{αν } i = i_k \\ -r_k & \text{αν } i = j_k \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Οι ροές $x_{ij}(k)$ συνήθως πρέπει επίσης να είναι μη αρνητικές και να ικανοποιούν περιορισμούς μέγιστης ροής.

Παράδειγμα: Δρομολόγηση σε δίκτυα υπολογιστών II

- Το συνολικό κόστος προς ελαχιστοποίηση είναι συχνά της μορφής

$$f(x) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} f_{ij}(y_{ij})$$

όπου f_{ij} είναι συνάρτηση της συνολικής ροής y_{ij}, που περνάει μέσα από τον αγωγό (i, j)

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{m} x_{ij}(k)$$

- Για παράδειγμα, συχνά θεωρούμε ότι το f παριστάνει μέση καθυστέρηση, η οποία όμως μπορεί να δίνεται από μη γραμμικό τύπο ως προς την κίνηση και να προκύπτει τελικά μη γραμμική συνάρτηση κόστους.

Ο περιοδεύων πωλητής, I

Δεδομένων N πόλεων (που όλες μαζί αποτελούν τους κόμβους ενός πλήρους γράφου) ζητείται να καθορισθεί ένας γύρος T (Χαμιλτώνεια διαδρομή) που περνάει τουλάχιστο μια φορά από καθεμιά και καταλήγει στην αφετηρία.

- Θέτουμε x_{ij} ίσο με 1 αν η ακμή (i, j) ανήκει στο γύρο, αλλιώς $x_{ij} = 0$. Η συνολική απόσταση είναι

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij}x_{ij} = \sum_{(i,j)\in T} a_{ij}$$

- Κάθε κόμβος i έχει μόνο μια εξερχόμενη και μια εισερχόμενη ακμή που να ανήκει στο γύρο:

$$\sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} = 1, (i = 1, \ldots, N)$$

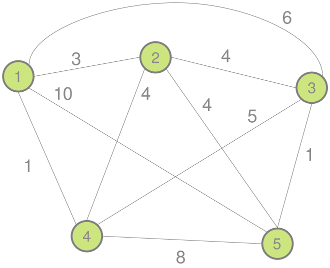
$$\sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji} = 1, (i = 1, \ldots, N)$$

Ο περιοδεύων πωλητής, ΙΙ

- Επί πλέον χρειάζεται ο περιορισμός που θα υποχρεώσει τη λύση, (δηλαδή τον υπο-γράφο που αποτελείται από όλους τους κόμβους και από εκείνες τις ακμές (i, j) που έχουν $x_{ij} = 1$) να είναι συνεκτικός γράφος. Διαφορετικά, εφικτή λύση είναι κι εκείνη που αποτελείται από πολλούς ασύνδετους κύκλους.

Παράδειγμα I

Δίνεται ο γράφος του σχήματος, στον οποίο πρέπει να επιλυθεί το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή.



Παράδειγμα II

- Ο γράφος κατά τα συνήθη μετατρέπεται σε προσανατολισμένο γράφο με δύο ακμές (i, j) και (j, i) για κάθε ζεύγος κόμβων i και j. Η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση είναι

$$
\begin{aligned}
z &= 3(x_{12}+x_{21})+4(x_{23}+x_{32})+ \\
&+ 4(x_{24}+x_{42})+10(x_{15}+x_{51})+ \\
&+ (x_{14}+x_{41})+8(x_{45}+x_{54})+ \\
&+ 5(x_{34}+x_{43})+(x_{35}+x_{53})+ \\
&+ 6(x_{13}+x_{31})+4(x_{52}+x_{25})
\end{aligned}
$$

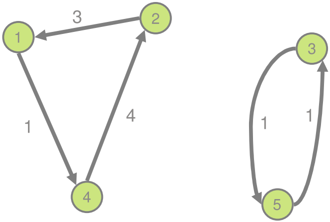
Παράδειγμα III

- με τους περιορισμούς

$$
\begin{aligned}
x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1\\
x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1\\
x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} &= 1\\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} &= 1\\
x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} &= 1\\
x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1\\
x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1\\
x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} &= 1\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} &= 1\\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 1
\end{aligned}
$$

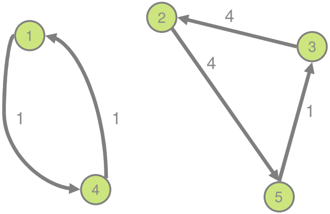
Παράδειγμα IV

- Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος (γραμμικού προγραμματισμού) δίνει $x_{21} = x_{42} = x_{14} = x_{35} = x_{53}$, που αντιστοιχεί σε δύο κύκλους, τον 1-4-2-1 και τον 3-5-3 και συνολική απόσταση ίση με $z = 10$.

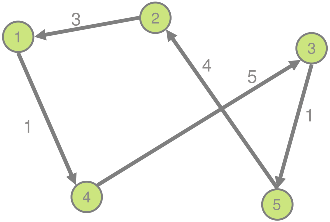


- Αν σε μια πρόχειρη προσπάθεια να βρεθεί λύση αποκλεισθεί ο κύκλος 3-5-3 με την επιβολή του πρόσθετου περιορισμού $x_{35} + x_{53} = 1$, προκύπτει η λύση 1-4-1 και 2-5-3-2 (και συνολική απόσταση $z = 11$) που και πάλι δεν μπορεί να γίνει δεκτή.

Παράδειγμα V



- Εφόσον και πάλι προστεθεί ο περιορισμός $x_{14} + x_{41} = 1$ προκύπτει η αποδεκτή λύση 1-4-3-5-2-1 με συνολική απόσταση ίση με $z = 14$.



Αλγόριθμοι επίλυσης του προβλήματος της ροής

Θα αναφερθούν περαιτέρω τρεις κατηγορίες αλγορίθμων, που βασίζονται αντίστοιχα στις ακόλουθες ιδέες:

- *Βελτίωση του κόστους:* Κατασκευάζεται μια ακολουθία εφικτών ροών που βελτιώνει βήμα προς βήμα το κόστος.
- *Βελτίωση του δυϊκού κόστους:* Κατασκευάζεται το δυϊκό πρόβλημα με μεταβλητές λεγόμενες *τιμές*. Κατόπιν βελτιώνεται και πάλι βήμα προς βήμα το κόστος αλλάζοντας τις ροές.
- *Πλειστηριασμός:* Κατασκευάζεται μια ακολουθία τιμών, που υπενθυμίζει τη διαδικασία πλειστηριασμού.

Αλγόριθμοι βελτίωσης του κόστους

- Οι αλγόριθμοι βελτίωσης του κόστους βασίζονται σε τροποποιήσεις της εφικτής ροής τέτοιες ώστε να μειώνεται το κόστος.

Η διαφορά μεταξύ εφικτών διανυσμάτων ροής είναι κυκλοφορία

Λήμμα: Αν x και $\overline{x}$ δυο εφικτά διανύσματα ροής για το πρόβλημα ροής ελαχίστου κόστους, η διαφορά τους $z = \overline{x} - x$ είναι *κυκλοφορία*. $\square$

Η απόκλιση d_i του κόμβου i όταν η ροή είναι z είναι

$$
\begin{aligned}
d_i &= \sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} z_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A}\}} z_{ji} = \\
&= \left[\sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} \overline{x}_{ij} - \sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij}\right] - \left[\sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A}\}} \overline{x}_{ji} - \sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji}\right] \\
&= \left[\sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} \overline{x}_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A}\}} \overline{x}_{ji}\right] - \left[\sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji}\right] \\
&= \overline{s}_i - s_i = 0
\end{aligned}
$$

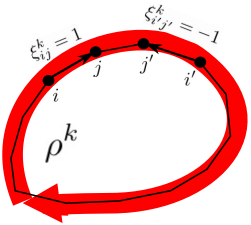
Ανάλυση του κόστους της κυκλοφορίας ως προς το κόστος των απλών κυκλικών ροών

- Με βάση το θεώρημα της σύμμορφης πραγματοποίησης (conformal realization) η z μπορεί να αποσυντεθεί σε άθροισμα απλών κυκλικών ροών,
- δηλαδή υπάρχει φυσικός αριθμός K και θετικοί πραγματικοί αριθμοί w^k ώστε

$$z = \sum_{k=1}^{K} w^k \xi^k$$

όπου ξ^k είναι απλές κυκλικές μοναδιαίες ροές συμμορφωμένες με την z.

- Δηλαδή υπάρχουν K απλά κυκλικά μονοπάτια ρ^k, με την εξής ιδιότητα:
  - Εφόσον $(i,j) \in \rho^{k+}$ (εμπρόσθιες ακμές), ισχύει $\xi_{ij}^k = 1$ και
  - εφόσον $(i,j) \in \rho^{k-}$ (ανάστροφες ακμές), ισχύει $\xi_{ij}^k = -1$.
- Επί πλέον υπάρχει συμμόρφωση με τη γενική ροή z, δηλαδή $\xi_{ij}^k = 1$ εφόσον $z_{ij} > 0$ και $\xi_{ij}^k = -1$ $z_{ij} < 0$.



- Επομένως

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij} z_{ij} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij} \sum_{k=1}^{K} w^k \xi_{ij}^k = \sum_{k=1}^{K} w^k \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij} \xi_{ij}^k$$

- Όμως στο άθροισμα $\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij}\xi_{ij}^k$
  - όσες ακμές δεν περιλαμβάνονται στον συγκεκριμένο κύκλο ρ^k έχουν $\xi_{ij}^k = 0$,
  - ενώ όσες περιλαμβάνονται έχουν $\xi_{ij}^k = 1$,

οπότε

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij}\xi_{ij}^k = \sum_{(i,j)\in\rho^k} a_{ij}\xi_{ij}^k = \sum_{(i,j)\in\rho^{k+}} a_{ij} - \sum_{(i,j)\in\rho^{k-}} a_{ij} = c^k$$

όπου c^k είναι το συνολικό κόστος του κύκλου ρ^k, οπότε τελικά

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij} z_{ij} = \sum_{k=1}^{K} w^k c^k$$

- δηλαδή η διαφορά ανάμεσα σε δύο εφικτές τιμές του κόστους είναι ίση με ένα άθροισμα από κόστη κύκλων.

Όταν μειώνεται το κόστος, στην κυκλοφορία-διαφορά υπάρχει ένας τουλάχιστο κύκλος με αρνητικό κόστος

- Αν το κόστος της ροής $\bar{x}$ είναι μικρότερο από το κόστος της ροής x, το κόστος της κυκλοφορίας z πρέπει να είναι αρνητικό

$$0 > \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij} z_{ij} = \sum_{k=1}^{K} w^k c^k$$

κι αφού οι συντελεστές w^k είναι θετικοί, ένα τουλάχιστον από τα c^k πρέπει να είναι αρνητικό.

- Επομένως, αν x είναι μια εφικτή ροή και αν $\bar{x}$ είναι επίσης εφικτή, αλλά με κόστος μικρότερο της x, υπάρχει ένας τουλάχιστον κύκλος με αρνητικό κόστος στην σύμμορφη αποσύνθεση της κυκλοφορίας $\bar{x} - x$. Με βάση αυτήν την πρόταση αποδεικνύεται το επόμενο λήμμα.

Λήμμα: Ένα διάνυσμα ροής x^* είναι βέλτιστο αν και μόνον αν είναι εφικτό και κάθε απλός κύκλος, που δεν είναι μπλοκαρισμένος ως προς το x^* έχει θετικό ή μηδενικό κόστος, δηλαδή

$$\sum_{(i,j)\in C_k^+} a_{ij} - \sum_{(i,j)\in C_k^-} a_{ij} \geq 0$$

Απόδειξη:

- Έστω x^* βέλτιστη ροή και έστω C απλός κύκλος που μπορεί να δεχθεί παραπάνω ροή στην κατεύθυνση του x^*. Υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε μεγαλώνοντας τη ροή στις ακμές του C^+ και μειώνοντας στις ακμές του C^- κατά ϵ να δημιουργείται νέα εφικτή ροή με κόστος ίσο προς το κόστος της x^* συν ϵ φορές το κόστος του C. Αφού η x^* είναι βέλτιστη, το κόστος του C είναι μη αρνητικό.
- Αντίστροφα, έστω ότι η x^* είναι εφικτή και έχει την ιδιότητα που αναφέρεται στο λήμμα για τους απλούς κύκλους, αλλά δεν είναι βέλτιστη. Αν $\overline{x}$ είναι άλλη επίσης εφικτή ροή με κόστος μικρότερο της x^*, προχωρούμε στην σύμμορφη αποσύνθεση της κυκλοφορίας $z = \overline{x} - x^*$.

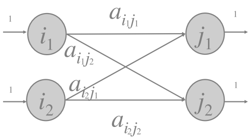
- Από τα λεγόμενα πριν το λήμμα στην προηγ. διαφάνεια, βλέπουμε ότι υπάρχει απλός κύκλος C με αρνητικό κόστος, τέτοιος ώστε $x^*_{ij} < \overline{x_{ij}}$ για κάθε (i,j) στο C^+ και επίσης τέτοιος ώστε $x^*_{ij} > \overline{x_{ij}}$ για κάθε (i,j) στο C^-. Αφού η ροή $\overline{x}$ είναι εφικτή, ισχύει $b_{ij} \leq \overline{x_{ij}} \leq c_{ij}$ για κάθε (i,j). ᾿ρα $x^*_{ij} < c_{ij}$ για όλα τα $(i,j) \in C^+$, και $x^*_{ij} > c_{ij}$ για όλα τα $(i,j) \in C^-$, οπότε ο κύκλος C δεν είναι γεμάτος από τη ροή x^*.
- Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι κάθε απλός κύκλος που δεν είναι γεμάτος από τη ροή x^* έχει μη αρνητικό κόστος.

Πρόβλημα της αντιστοίχισης: Βελτίωση με εναλλαγή σε δύο ζεύγη

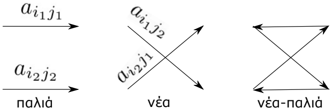
Ας υποθέσουμε ότι στο πρόβλημα της αντιστοίχισης $n \times n$ έχουμε βρει ήδη μια εφικτή αντιστοίχιση.

- Προκειμένου να τη βελτιώσουμε μπορούμε να θεωρήσουμε μια ανταλλαγή δυο ατόμων, δηλαδή ξεκινώντας από τα ζεύγη (i_1, j_1) και (i_2, j_2) να καταλήξουμε στα ζεύγη (i_1, j_2) και (i_2, j_1). Η νέα επίσης εφικτή αντιστοίχιση θα έχει υψηλότερο κέρδος αν

$$a_{i_1,j_2} + a_{i_2,j_1} > a_{i_1,j_1} + a_{i_2,j_2}$$



Εφαρμογή στην εναλλαγή σε δύο ζεύγη



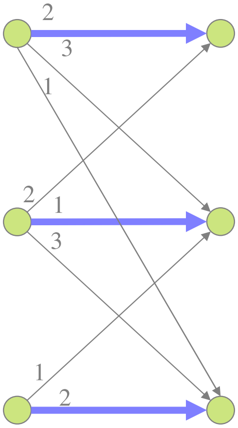
- Στο παραπάνω σχήμα είναι αριστερά η ροή x που θα αντιστοιχούσε στη λύση (i_1, j_1) και (i_2, j_2), στη μέση η ροή $\bar{x}$ που θα αντιστοιχούσε στη λύση (i_1, j_2) και (i_2, j_1) και δεξιά η ροή $\bar{x} - x$.
- Η νέα μείον τη παλιά δημιουργεί ένα κύκλο κόστους

$$a_{i_1,j_2} + a_{i_2,j_1} - a_{i_1,j_1} - a_{i_2,j_2}$$

- Δεδομένου ότι πάμε για μεγιστοποίηση, βελτίωση της λύσης είναι δυνατή αν ο παραπάνω κύκλος έχει θετικό κόστος, δηλαδή αν

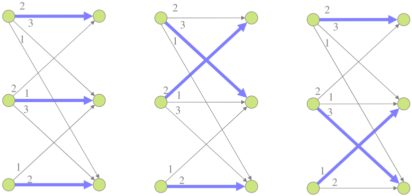
$$a_{i_1,j_2} + a_{i_2,j_1} > a_{i_1,j_1} + a_{i_2,j_2}$$

Παρατηρήσεις στο πρόβλημα της αντιστοίχισης



(α)

- Ας υποτεθεί ότι στο πρόβλημα αντιστοίχισης του σχήματος δίνεται η αρχική λύση (α) (κόκκινες παχιές γραμμές) με όφελος $2 + 1 + 2 = 5$.
- Ας υποτεθεί επίσης ότι στόχος είναι η επίτευξη βέλτιστης λύσης μόνο με εναλλαγές μεταξύ ζευγών.



(α) (β) (γ)

- Η εναλλαγή μεταξύ των δύο πρώτων (εκ των άνω) ζευγών φέρνει τη λύση (β) και βελτιώνει το όφελος σε $3 + 2 + 2 = 7$.
- Η εναλλαγή μεταξύ των δύο τελευταίων ζευγών φέρνει τη λύση (γ) και βελτιώνει το όφελος σε $2 + 3 + 1 = 6$.
- Ωστόσο αν γίνει η μετάβαση (α) - (γ), δεν υπάρχει τρόπος βελτίωσης με εναλλαγές μεταξύ ζευγών. Λόγω και της ύπαρξης της λύσης (β) φαίνεται ότι η μετάβαση (α) - (γ) οδηγεί με βεβαιότητα σε μη βέλτιστη λύση.

Επίλυση μέσω του δυϊκού κόστους: Εισαγωγή συστήματος τιμών

- Εκτίθεται αλγόριθμος βελτίωσης του δυϊκού κόστους στο παράδειγμα αντιστοίχισης.
- Η αντιστοίχιση βασίζεται στην εισαγωγή ενός μηχανισμού καθορισμού τιμών για τα «αντικείμενα».
- Αν p_j είναι η τιμή του «αντικειμένου» j, για το «πρόσωπο» i το αντικείμενο αυτό έχει αξία $a_{ij} - p_j$.

Συνθήκες *συμπληρωματικής χαλαρότητας*

- Δεδομένου ενός συνόλου τιμών, το πρόσωπο i επιδιώκει τη μεγιστοποίηση του $a_{ij} - p_j$ μέσω της επιλογής, ήτοι επιλέγει το j_i ώστε

$$a_{ij_i} - p_{j_i} = \max_{j \in A(i)} \{a_{ij} - p_j\} \tag{16}$$

  όπου $A(i) = \{j | (i,j) \in \mathcal{A}\}$.
- Όταν αυτό ισχύει για όλα τα πρόσωπα, λέμε ότι ισχύουν οι συνθήκες *συμπληρωματικής χαλαρότητας* (CS, Complementary Slackness).

Σχέση της βέλτιστης αντιστοίχισης με τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας

- Αν σε μια δυνατή αντιστοίχιση το σύνολο τιμών ικανοποιεί τη συνθήκη 16 για όλα τα πρόσωπα, η αντιστοίχιση είναι βέλτιστη και οι τιμές αποτελούν βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος, που συνίσταται στη χρήση των μεταβλητών $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ και την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(p) + \sum_{j=1}^{n} p_j$$

όπου

$$q_i(p) = \max_{j \in A(i)} \{a_{ij} - p_j\}$$

- Η αξία της βέλτιστης αντιστοίχισης στο αρχικό πρόβλημα και το ελάχιστο κόστος στο δυϊκό ταυτίζονται.

Απόδειξη

- Για κάθε δυνατή αντιστοίχιση $\{(i, k_i) | i = 1, \ldots, n\}$ και οποιεσδήποτε τιμές ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \max_{j \in A(i)} \{a_{ij} - p_j\} + \sum_{i=1}^{n} p_i$$

- Για τιμές $\overline{p}_j$ που ικανοποιούν τις συνθήκες CS ισχύει:

$$a_{ij_i} - \overline{p}_{j_i} = \max_{j \in A(i)} \{a_{ij} - \overline{p}_j\}$$

’ρα

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_{ik_i} &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\max_{j \in A(i)} \{a_{ij} - \overline{p}_j\} + \overline{p}_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij_i} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \max_{j \in A(i)} \{a_{ij} - p_j\} + \sum_{i=1}^{n} p_i
\end{aligned}$$

- Παρατηρούμε συγκρίνοντας το μέλος 1 με το μέλος 3 ότι η αντιστοίχιση (i, j_i) μεγιστοποιεί τη συνάρτηση «ικανοποίησης» στο αρχικό πρόβλημα.
- Συγκρίνοντας το μέλος 2 με το μέλος 4 βλέπουμε ότι οι τιμές $\overline{p}_j$ ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση κόστους του δυϊκού προβλήματος.

Βελτίωση του δυϊκού κόστους

- Αρχίζοντας από ένα διάνυσμα τιμών οι περισσότεροι αλγόριθμοι βασίζονται στη δημιουργία ενός νέου διανύσματος, όπου οι τιμές ενός συνεκτικού υποσυνόλου κόμβων αυξάνονται ομαδικά κατά γ, όπου γ είναι μικρός θετικός αριθμός, τέτοιος ώστε το νέο διάνυσμα τιμών να έχει βελτιωμένο δυϊκό κόστος.
- Αν το κόστος δεν είναι ελάχιστο, αποδεικνύεται ότι υπάρχει πάντοτε ένα τέτοιο υποσύνολο των κόμβων.

Απλοϊκή δημοπρασία, I

- Η απλοϊκή δημοπρασία προχωράει με βήματα μεταξύ μερικών αντιστοιχίσεων (που δεν έχουν εμπλέξει όλα τα πρόσωπα).
- Στην αρχή κάθε βήματος η συνθήκη CS ισχύει για όλα τα πρόσωπα της μερικής αντιστοίχισης:

$$a_{ij_i} - p_{j_i} = \max_{j \in A(i)} \{a_{ij} - p_j\}$$

Αν περιλαμβάνονται συνολικά όλα τα πρόσωπα, ο αλγόριθμος τερματίζει.

Απλοϊκή δημοπρασία, II

- Αλλιώς ένα μη αντιστοιχισμένο πρόσωπο, έστω i, αντιστοιχίζεται σε κάποιο αντικείμενο, που του προσφέρει τη μέγιστη τιμή, ήτοι μεγιστοποιεί τη διαφορά $a_{ij} - p_j$, έστω j_i. Κατόπιν η τιμή p_{j_i} του αντικειμένου j_i αυξάνεται σε $p_{j_i} + \gamma_i$. Το γ_i προσδιορίζεται έτσι ώστε το αντικείμενο j_i να γίνεται πλέον εξ ίσου ενδιαφέρον (ή αδιάφορο) με το αμέσως επόμενο πιο ενδιαφέρον αντικείμενο, δηλαδή

$$\gamma_i = v_i - w_i,$$

όπου

$$v_i = \max_{j \in A(i)} \{a_{ij} - p_j\}$$

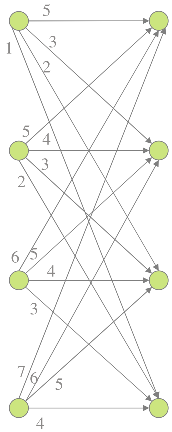
και

$$w_i = \max_{j \in A(i), j \neq j_i} \{a_{ij} - p_j\}.$$

Απλοϊκή δημοπρασία, III

- Ο απλοϊκός αλγόριθμος μπορεί να καταλήξει σε ισοπαλία, δηλαδή κατάσταση όπου $\gamma_i = 0$ και περισσότερα του ενός πρόσωπα διεκδικούν το ίδιο αντικείμενο χωρίς αύξηση της τιμής. Ο αλγόριθμος μπαίνει σε βρόχο χωρίς τέλος.

Άσκηση:



Δίνεται ο διπλανός προσανατολισμένος γράφος του προβλήματος αντιστοίχισης. Να υπολογισθεί η βέλτιστη αντιστοίχιση με τη μέθοδο της δημοπρασίας.

Βελτιωμένη δημοπρασία

Για να αποφευχθεί η παραπάνω κατάσταση, χρησιμοποιείται ένα όριο ανοχής ϵ στην προσέγγιση της βέλτιστης τιμής. Ειδικότερα λέμε ότι μια μερική αντιστοίχιση κι ένα διάνυσμα τιμών ικανοποιούν τη συνθήκη *ϵ-συμπληρωματικής χαλαρότητας* (ϵ complementary slackness) αν

$$a_{ij} - p_{ij} \geq \max_{k \in A(i)} \{a_{ik} - p_k\} - \epsilon$$

Ο βελτιωμένος αλγόριθμος διαφέρει από τον απλοϊκό αλγόριθμο κατά το ότι

$$\gamma_i = v_i - w_i + \epsilon$$

Το τελικό αποτέλεσμα για την συνάρτηση κόστους απέχει από το βέλτιστο το πολύ κατά $n\epsilon$, ενώ και οι τιμές πλησιάζουν με την ίδια προσέγγιση (δες πρόταση 1.4, D. Bertsekas, “Network Optimization”). Μικρή τιμή του ϵ φέρνει πιο κοντά στο βέλτιστο το αποτέλεσμα, αλλά μεγαλύτερη τιμή επιταχύνει την εκτέλεση.