

Γράφοι και ροές

11 Νοεμβρίου 2022

Εισαγωγή στη γραφοθεωρία

Γράφοι

Paths

Subgraphs

Ροές

Διάνυσμα ροής

Απόκλιση, πηγή, καταβόθρα

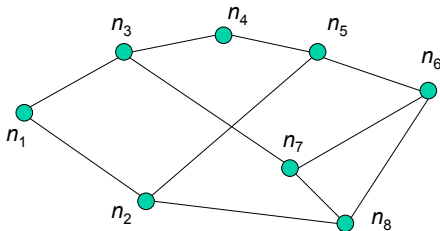
Μη αποκλεισμένο μονοπάτι ως προς ένα διάνυσμα ροής

Απλές ροές μονοπατιών

Θεώρημα της σύμμορφης πραγματοποίησης

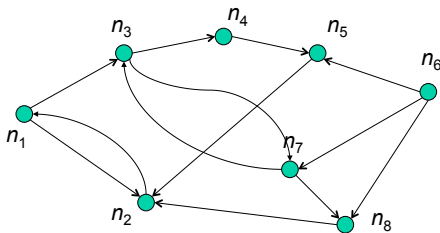
Μη προσανατολισμένος γράφος

- ▶ Γράφος $G = (N, A)$, N σύνολο κόμβων, A σύνολο ζευγών διαφορετικών κόμβων από το N που καλούνται ακμές.
- ▶ Όλες οι ακμές είναι διπλής κατεύθυνσης.
- ▶ $N = \{n_1, n_2, \dots, n_8\}$
- ▶ $A = \{(n_1, n_2), (n_1, n_3), (n_3, n_4), (n_4, n_5), (n_5, n_6), (n_6, n_8), (n_6, n_7), (n_7, n_8), (n_3, n_7), (n_2, n_8), (n_2, n_5)\}$



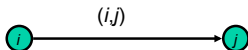
Προσανατολισμένος γράφος

- ▶ Γράφος $G = (N, A)$, N σύνολο κόμβων, A σύνολο ζευγών από διαφορετικούς κόμβους του N που καλούνται ακμές.
- ▶ $N = \{n_1, n_2, \dots, n_8\}$
- ▶ $A = \{(n_1, n_2), (n_1, n_3), (n_2, n_1), (n_3, n_4), (n_3, n_7), (n_4, n_5), (n_5, n_2), (n_6, n_5), (n_6, n_7), (n_6, n_8), (n_7, n_3), (n_7, n_8), (n_8, n_2)\}$



Προσανατολισμένος γράφος: Μια σημείωση ορολογίας

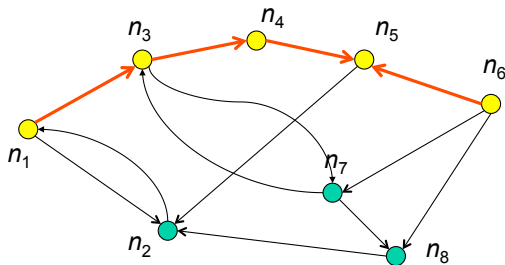
- ▶ Η ακμή (i, j) «εξέρχεται το κόμβου i », «εισέρχεται στον κόμβο j »; (i, j) «προσπίπτει στους i και j », i είναι ο «αρχικός κόμβος», j είναι ο «τελικός κόμβος».



- ▶ Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου θα χρησιμοποιούνται προσανατολισμένοι γράφοι.

Paths

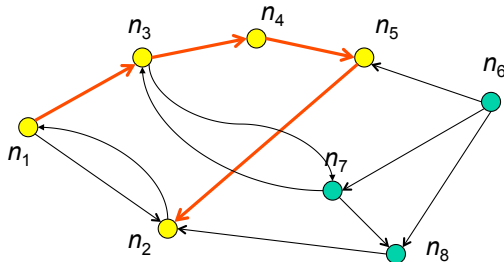
- ▶ Μονοπάτι (ή διαδρομή): Μια ακολουθία κόμβων μαζί με τις αντίστοιχες ακμές, προς τα εμπρός ή προς τα πίσω.
- ▶ n_1 <<αρχικός κόμβος>>, n_6 <<τελικός κόμβος>>.
- ▶ Στο μονοπάτι P , P^+ είναι το σύνολο των προς τα εμπρός ακμών, P^- είναι το σύνολο των προς τα πίσω ακμών.



Paths

Προς τα εμπρός (προς τα πίσω) μονοπάτι: Όλες οι ακμές του είναι προς τα εμπρός (προς τα πίσω).

Απλό μονοπάτι: Δεν περιλαμβάνει επαναλήψεις ακμών ή κόμβων (εκτός από τον αρχικό κόμβο όταν πρόκειται για απλό κύκλο).

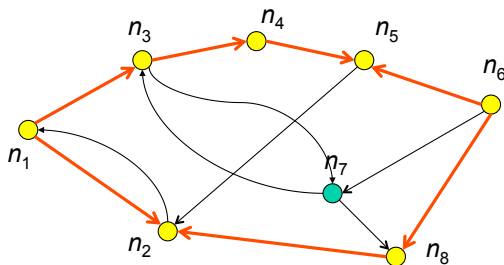


Κύκλοι

Κύκλος: Μονοπάτι τέτοιο ώστε αρχικός κόμβος = τελικός κόμβος.

Απλός κύκλος: Κύκλος χωρίς επαναλήψεις ακμών ή κόμβων.

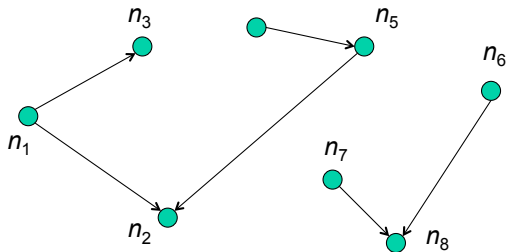
Χαμιλτώνειος κύκλος: Απλός προς τα εμπρός κύκλος που περιέχει όλους τους κόμβους του γράφου.



Red path is a simple cycle

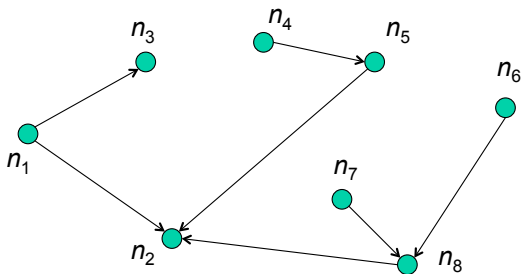
Ακυκλικός γράφος

- ▶ Δεν περιέχει κύκλους.

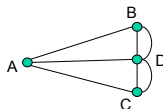
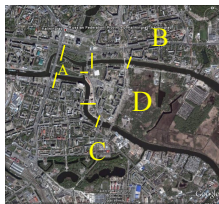


Συνδεδεμένος γράφος, δέντρο

- ▶ *Συνδεδεμένος γράφος*: Υπάρχει ένα μονοπάτι ανάμεσα σε οποιοσδήποτε δύο κόμβους.
- ▶ Το *δέντρο* είναι ένας συνδεδεμένος ακυκλικός γράφος.

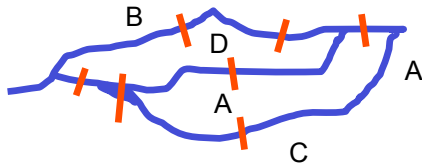


Οι γέφυρες του Καλίνινγκραντ (πρώην Königsberg)

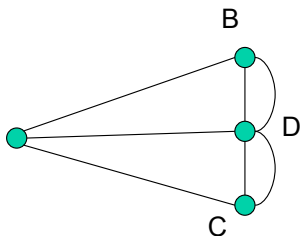


- ▶ Το πρόβλημα του Euler: Να βρεθεί ένας περίπατος διαμέσου της πόλης τέτοιος ώστε κάποιος να περνάει κάθε γέφυρα ακριβώς μια φορά.
- ▶ Τροποποιημένο πρόβλημα του Euler's: Να βρεθεί ένας περίπατος διαμέσου της πόλης τέτοιος ώστε κάποιος να περνάει κάθε γέφυρα ακριβώς μια φορά και να καταλήγει στο σημείο απ' όπου ξεκίνησε.

Γράφοι Euler



Koenigsberg bridge problem



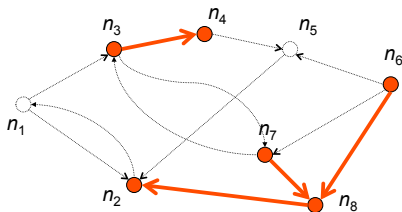
Equivalent graph

- ▶ Θεώρημα: Υπάρχει ένας κύκλος (όχι απαραίτητα προς τα εμπρός) που περιλαμβάνει όλες τις ακμές ακριβώς μια φορά αν και μόνον αν ο γράφος είναι συνδεδεμένος και κάθε κόμβος του έχει άρτιο βαθμό.¹
- ▶ Ένας τέτοιος κύκλος καλείται κύκλος Euler.
- ▶ Υπάρχει κύκλος Euler για το πρόβλημα με τις γέφυρες του Königsberg;

¹Βαθμός είναι ο αριθμός των ακμών που συνδέονται με τον κόμβο.

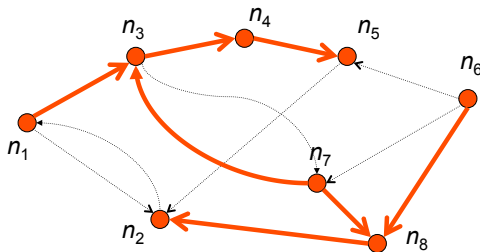
Υπογράφος

- ▶ *Υπογράφος* ενός γράφου G είναι ένας άλλος γράφος που σχηματίζεται από ένα υποσύνολο των κόμβων και των ακμών του G . Το σύνολο κόμβων του υπογράφου πρέπει να περιλαμβάνει όλους τους κόμβους που είναι άκρα ακμών που έχουν περιληφθεί στο σύνολο ακμών του υπογράφου, αλλά μπορεί να περιλαμβάνει επιπρόσθετους κόμβους.
- ▶ *Επαγόμενος υπογράφος* του G από σύνολο κόμβων V (όπου $V \subseteq N$) είναι ο γράφος G' με σύνολο κόμβων V και σύνολο ακμών που είναι τέτοιες ώστε και τα δυο τους άκρα να είναι στο V .



Διατρέχον δέντρο (spanning tree)

- ▶ Διατρέχον δέντρο του G είναι ένας υπογράφος του G , που είναι δέντρο και περιλαμβάνει όλους τους κόμβους του G .
- ▶ Λήμμα: Ένας υπογράφος είναι διατρέχον δέντρο ακριβώς όταν είναι συνδεδεμένος και έχει $N - 1$ ακμές.

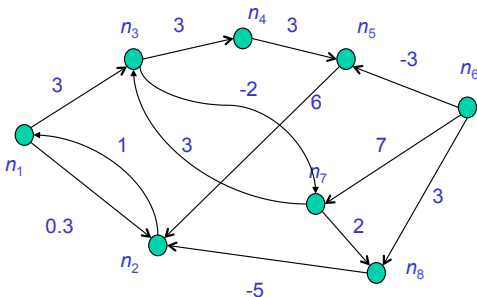


Ροές

- ▶ Ροή ακμής (i, j) : Ένα μονόμετρο μέγεθος x_{ij} (πραγματικός αριθμός, μπορεί να είναι αρνητικός).
- ▶ Δεδομένου ενός γράφου (N, A) , ένα σύνολο ροών

$$\{x_{ij} | (i, j) \in A\}$$

αναφέρεται ως *διάνυσμα ροής*.

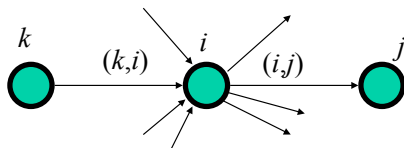


Απόκλιση κόμβου

- ▶ Δεδομένου ενός διανύσματος ροής x και ενός γράφου G η απόκλιση του κόμβου i είναι:

$$y_i = \sum_{\{j|(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{k|(k,i) \in A\}} x_{ki}$$

δηλαδή είναι η συνολικά εξερχόμενη ροή αφαιρουμένης της εισερχόμενης ροής.

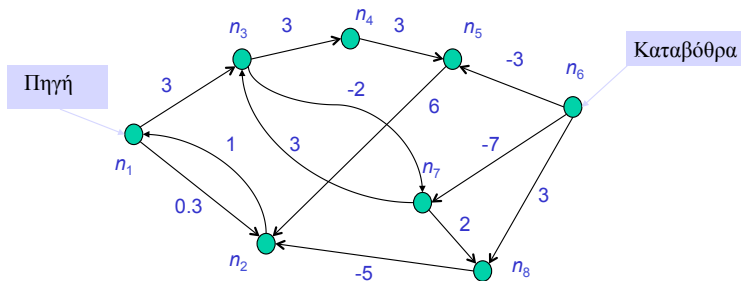


- ▶ Συνέπεια του παραπάνω ορισμού της απόκλισης:

$$\sum_{i \in N} y_i = 0$$

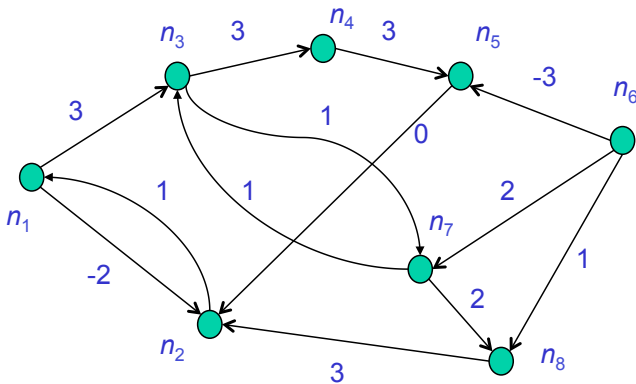
Πηγή / καταβόθρα

- Ο κόμβος i είναι πηγή (καταβόθρα) για τη ροή x αν $y_i > 0$ ($y_i < 0$).



Κυκλοφορία

- Αν $y_i = 0$ για όλα τα i στο N , η ροή x καλείται *κυκλοφορία*.



Μονοπάτι P μη αποκλεισμένο ως προς το διάνυσμα ροής x

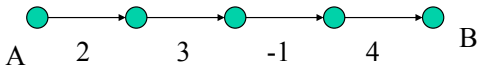
- ▶ Ας υποτεθεί ότι για κάθε ακμή υπάρχει ένα άνω φράγμα c_{ij} για την ροή της x_{ij} , καθώς και ένα κάτω φράγμα b_{ij} .
- ▶ Αν $b_{ij} < x_{ij} < c_{ij}$, δεδομένου ενός διανύσματος ροής x , ένα μονοπάτι P είναι μη αποκλεισμένο από την ροή x αν μπορεί να προστεθεί θετική ροή κατά μήκος του P χωρίς να παραβιασθούν οι περιορισμοί, δηλαδή μπορεί να αυξηθεί (μειωθεί) η ροή πάνω στο μονοπάτι P^+ (P^-) που αποτελείται από τις προς τα εμπρός (προς τα πίσω) ακμές:

$$x_{ij} < c_{ij} \quad \forall (i, j) \in P^+$$

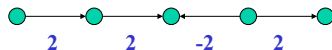
$$x_{ij} > b_{ij} \quad \forall (i, j) \in P^-$$

Παράδειγμα

- ▶ Υποθέτοντας ότι σ' αυτό το δίκτυο ισχύει $c_{ij} = 5$ και $b_{ij} = -5$ για όλες τις ακμές, είναι το μονοπάτι από το A ως το B μη αποκλεισμένο;
- ▶ Ποια είναι η μέγιστη ροή που μπορεί να προστεθεί θετικά από το A προς το B ;
- ▶ Ίδια ερώτηση για το μονοπάτι από το B προς το A .



Απλή ροή μονοπατιού

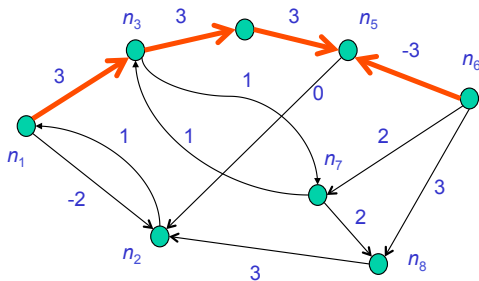


- ▶ Μια απλή ροή μονοπατιού στέλνει ένα θετικό ποσό ροής κατά μήκος ενός απλού μονοπατιού P :

$$x_{ij} = \begin{cases} a & \text{if } (i, j) \in P^+ \\ -a & \text{if } (i, j) \in P^- \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ Αν το P είναι κύκλος, το x καλείται απλή κυκλική ροή.
- ▶ P συμμορφώνεται με την x αν είναι
 - (a) $x_{ij} > 0$ για όλες τις προς τα εμπρός ακμές (i, j) του P , και
 - (b) $x_{ij} < 0$ για όλες τις προς τα πίσω ακμές (i, j) του P , και
 - (c) P είτε είναι κύκλος είτε ο αρχικός κόμβος του P είναι πηγή και ο τελικός κόμβος του P είναι καταβόθρα.

Ερώτηση

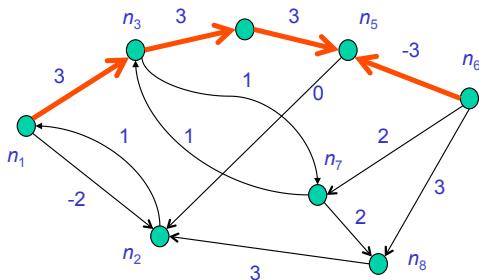


- ▶ Το μονοπάτι που αποτελείται από την ακολουθία ακμών

$$(n_1, n_3), (n_3, n_4), (n_4, n_5), (n_5, n_6)$$

συμμορφώνεται με το διάνυσμα ροής που φαίνεται στο σχήμα;

Απάντηση



- Το μονοπάτι που αποτελείται από την ακολουθία ακμών

$$(n_1, n_3), (n_3, n_4), (n_4, n_5), (n_6, n_5)$$

συμμορφώνεται με το διάνυσμα ροής που φαίνεται στο σχήμα:

- Όχι, διότι ο κόμβος n_1 δεν είναι πηγή.

Απλή ροή μονοπατιού που συμμορφώνεται με διάνυσμα ροής

- ▶ Μια απλή ροή μονοπατιού x^s συμμορφώνεται προς το διάνυσμα ροής x αν το μονοπάτι P που αντιστοιχεί στο x^s μέσω της (1) συμμορφώνεται με το x .
- ▶ Αυτό είναι ισοδύναμο με τις συνθήκες

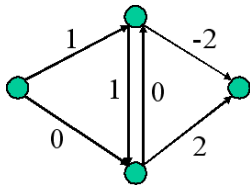
$$0 < x_{ij} \quad \forall(i, j) : 0 < x_{ij}^s$$

$$x_{ij} < 0 \quad \forall(i, j) : x_{ij}^s < 0$$

Θεώρημα της σύμμορφης πραγματοποίησης

- ▶ Ένα μη μηδενικό διάνυσμα ροής x μπορεί να αποσυντεθεί σε άθροισμα t διανυσμάτων απλής ροής μονοπατιού x^1, x^2, \dots, x^t που συμμορφώνονται με το x , με το t να είναι το πολύ ίσο με το άθροισμα των αριθμών των ακμών και των κόμβων $A + N$.
- ▶ Αν το x είναι ακέραιο, τότε τα x^1, x^2, \dots, x^t μπορούν επίσης να επιλεγούν να είναι ακέραια.
- ▶ Αν το x είναι κυκλοφορία, τότε τα x^1, x^2, \dots, x^t μπορούν να επιλεγούν ως απλές κυκλικές ροές και $t \leq A$.

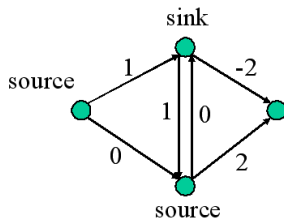
Πρόβλημα



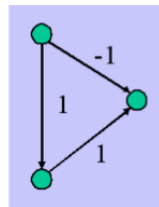
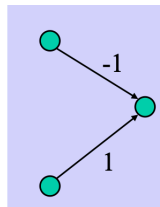
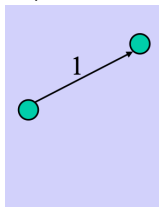
Να αποσυνθέσετε το διάνυσμα ροής x σε απλές ροές μονοπατιού..

Λύση

Βήμα 1 Βρίσκουμε πηγές και καταβόθρες:



Βήμα 2 Βρίσκουμε απλές ροές μονοπατιού από πηγές προς καταβόθρες ή απλές κυκλικές ροές:



Βιβλιογραφία

- [1] D.P. Bertsekas. *Network Optimization: Continuous and Discrete Methods*. Athena scientific optimization and computation series. Athena Scientific, 1998. ISBN: 9781886529021. URL: <https://books.google.gr/books?id=afYYAQAIAAJ>.
- [2] Wikipedia contributors. *Glossary of graph theory terms --- Wikipedia, The Free Encyclopedia*. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Glossary_of_graph_theory_terms&oldid=863082362. [Online; accessed 31-October-2018]. 2018.