ΜΑΘΗΜΑ: «Κβαντική Θεωρία της Ύλης», ΔΜΠΣ-ΜΙΝΑ, ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2022-2023
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Λ. ΤΣΕΤΣΕΡΗΣ
2η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Οι ασκήσεις δίνονται για εξάσκηση, δεν ζητείται η παράδοση των λύσεων στον διδάσκοντα.

Πρόβλημα Β.1: Σωματίδιο μάζας m βρίσκεται μέσα στο δυναμικό ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα ω και την χρονική στιγμή $t=0$ έχει κυματοσυνάρτηση (στο σύστημα φυσικών μονάδων του ταλαντωτή) $\psi(x,t=0)=N(x+1)^2 e^{-x^2/2}$, όπου N σταθερά με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις.
(α) Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση, βρείτε το χαρακτηριστικό μήκος (δηλαδή την μονάδα του μήκους), την χαρακτηριστική ορμή και την χαρακτηριστική ενέργεια του συστήματος. Προσδιορίστε την σταθερά N και γράψτε την κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t=0)$ στις σωστές φυσικές διαστάσεις (δηλαδή στο σύστημα μονάδων στο οποίο δεν θεωρούμε ότι ισχύει $\hbar=m=\omega$).
(β) Αν την χρονική στιγμή $t=0$ γίνει μέτρηση της ενέργειας, ποιες τιμές μπορούν να μετρηθούν και με ποιες πιθανότητες;
(γ) Βρείτε την αβεβαιότητα στην μέτρηση της θέσης την χρονική στιγμή $t=0$.
(δ) Βρείτε την χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$ για $t>0$.

Πρόβλημα Β.2: Βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις και τις ιδιοενέργειες για τον "μισό" αρμονικό ταλαντωτή που ορίζεται από το δυναμικό $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ αν $x\geq 0, V(x)=+\infty$ αν $x<0$.

Πρόβλημα Β.3: Η Χαμιλτονιανή αρμονικού ταλαντωτή στο σύστημα φυσικών μονάδων $\hbar=m=\omega=1$ γράφεται ως $H_0=(x^2+p^2)/2$.

(α) Επαληθεύστε ότι η κυματοσυνάρτηση $\psi_0(x)=N e^{-x^2/2}$ είναι η ιδιοσυνάρτηση της βασικής κατάστασης της H_0 και βρείτε τον συντελεστή κανονικοποίησης N.

(β) Βρείτε την κανονικοποιημένη ιδιοσυνάρτηση $\psi_1(x)$ για την πρώτη διεγερμένη στάθμη του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή.

(γ) Έστω ότι στην H_0 προστίθεται ο όρος $\Delta H=a x$, όπου a σταθερά με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις. Βρείτε τις ιδιοενέργειες και τις ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής $H=H_0+\Delta H$.

Πρόβλημα Β.4: Για ισότροπο αρμονικό ταλαντωτή σε δύο διαστάσεις η Χαμιλτονιανή δίνεται από την σχέση $H_0=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$. Θεωρώντας ως γνωστά τα αποτελέσματα του μονοδιάστατου κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή, απαντήστε στα παρακάτω:

(α) Βρείτε τις ενέργειες για τις 3 χαμηλότερες στάθμες του διδιάστατου συστήματος με Χαμιλτονιανή H_0. Υπάρχει εκφυλισμός; Βρείτε επίσης τις κυματοσυναρτήσεις για την βασική και την πρώτη διεγερμένη κατάσταση.
(β) Έστω τώρα ότι στην Χαμιλτονιανή H_0 προστίθεται μία αλληλεπίδραση που περιγράφεται από τον όρο $V(x,y)=m\omega^2 xy/2$. Βρείτε τις ιδιοενέργειες και ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής H_0+V. Υπόδειξη: κάντε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό από τις συντεταγμένες x και y σε νέες συντεταγμένες $\tilde{x}$ και $\tilde{y}$.

Πρόβλημα Β.5: *Φαινόμενο Zeeman*. Η περιστροφική κίνηση του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου αντιστοιχεί σε μαγνητική διπολική ροπή $\boldsymbol{\mu}_L=\mu_B \boldsymbol{L}$, όπου μ_B η μαγνητόνη του Bohr και $\boldsymbol{L}$ η τροχιακή στροφορμή του ηλεκτρονίου. Η ενέργεια αλληλεπίδρασης της μαγνητικής αυτής ροπής με μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ δίνεται από τον όρο $U=-\boldsymbol{\mu}_L\cdot\boldsymbol{B}$. Βρείτε τις ιδιοενέργειες και τις ιδιοσυναρτήσεις ενός *p*-ηλεκτρονίου (δηλαδή με κύριο κβαντικό αριθμό $n > 1$ και $l = 1$) σε ένα άτομο υδρογόνο που βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}=B\hat{\boldsymbol{x}}$.

Πρόβλημα Β.6: Υπολογίστε την μέση τιμή των μεγεθών $L^2, L_x, L_y, L_z, L_y^2, L_x^3$ για ιδιοκατάσταση του ατόμου του υδρογόνου με κβαντικούς αριθμούς *n*, *l* και *m*.

Πρόβλημα Β.7: Σωματίδιο μάζας *m* βρίσκεται τη στιγμή t_0 σε κατάσταση που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(\theta,\varphi)=N\sin\varphi\sin\theta$, όπου *N* πραγματική σταθερά.
(α) Βρείτε τις τιμές (και τις σχετικές πιθανότητες) που μπορούν να δώσουν μετρήσεις των L^2 και L_z την στιγμή t_0.
(β) Βρείτε τη αβεβαιότητα ΔL_x τη στιγμή t_0.
(γ) Βρείτε τη κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου σε χρονική στιγμή $t > t_0$, αν αυτό κινείται ελεύθερα πάνω σε επιφάνεια σφαίρας ακτίνας *a*.

Πρόβλημα Β.8: Η κατάσταση ενός σωματιδίου με spin $S = 1/2$ περιγράφεται εν γένει από ένα διάνυσμα $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. (α) Βρείτε τις πιθανότητες P_+ και P_- για την κατάσταση $\boldsymbol{X}$ να μετρηθούν οι τιμές $S_z=1/2$ και $S_z=-1/2$, αντίστοιχα. Αν πολλές μετρήσεις του S_z δίνουν μέση τιμή $\langle S_z\rangle$, ποιες είναι οι πιθανότητες P_+ και P_- συναρτήσει του $\langle S_z\rangle$;
(β) Δείξτε ότι η γνώση του μέσου διανύσματος $\langle \boldsymbol{S}\rangle=(\langle S_x\rangle,\langle S_y\rangle,\langle S_z\rangle)$ αρκεί για τον πλήρη προσδιορισμό του διανύσματος $\boldsymbol{X}$. Δίνεται ότι $S_x=\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, S_y=\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

Πρόβλημα Β.9: Σωματίδιο με σπιν $S=1$ και μαγνητική ροπή $\boldsymbol{\mu}=\gamma \boldsymbol{S}$ (όπου γ είναι ο λεγόμενος γυρομαγνητικός λόγος) βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}=B\hat{y}$.
(α) Χρησιμοποιώντας την αλγεβρική μέθοδο, βρείτε τον τελεστή S_y.
(β) Να βρεθεί ο τελεστής χρονικής εξέλιξης $U(t)$ για το παραπάνω σωματίδιο (υπόδειξη: υπολογίστε τις 3 πρώτες δυνάμεις του S_y και επιχειρηματολογήστε ότι θα είναι $U(t)=A+BS_y+CS_y^2$, όπου A, B και C είναι σταθερές που πρέπει να προσδιορίσετε).

(γ) Αν την στιγμή $t=0$ το σωματίδιο έχει καθορισμένη προβολή $S_z=-1$ ως προς τον *z*-άξονα, βρείτε την κατάσταση σε χρονική στιγμή $t>0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.10: Σε περιοχή του χώρου υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης *B* που δείχνει κατά την κατεύθυνση $\hat{n}=(n_x, n_y, n_z)$. Η Χαμιλτονιανή για σωματίδιο με σπιν $1/2$ σε αυτή την περίπτωση είναι $H=-\varepsilon\sigma_n$, όπου $\sigma_n=\begin{bmatrix} n_z & n_x-in_y \\ n_x+in_y & -n_z \end{bmatrix}$ και ε μία σταθερά με διαστάσεις ενέργειας. Έστω τώρα ότι το πεδίο έχει κατεύθυνση $\hat{n}=\hat{x}$ και ότι την χρονική στιγμή $t_0=0$ το σωματίδιο είναι στην κατάσταση $X_{\uparrow}(t_0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

(α) Βρείτε την χρονική στιγμή (ή στιγμές) t_1 στην οποία το σωματίδιο βρίσκεται σε κατάσταση που είναι φυσικά ισοδύναμη με την $X_{\downarrow}(t_1)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

(β) Αν γίνει μέτρηση της ενέργειας την χρονική στιγμή t_1, ποιες είναι οι πιθανές μετρήσεις και ποια η πιθανότητα για κάθε μέτρηση;

(γ) Αν την στιγμή t_0 εφαρμόζουμε (εκτός από το παραπάνω πεδίο $\boldsymbol{B_1}=B\hat{x}$) και ένα δεύτερο ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}_2=B\hat{y}$, βρείτε την μέση τιμή της ενέργειας του παραπάνω σωματιδίου εκείνη την χρονική στιγμή.