ΕΙΔΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ, 25/2/2022

Θέμα 1. *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι Σωστές (Σ) και ποιές είναι Λάθος (Λ) (δεν απαιτείται δικαιολόγηση).*

(1) *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ κάτω φραγμένο τότε το A έχει ελάχιστο στοιχείο.*

(2) *Ισχύει ότι* $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = 1$.

(3) *Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν έχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία.*

(4) *Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.*

(5) *Αν μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε έχει αντιπαράγωγο.*

Θέμα 2. *Απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.*

(1) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $f(q) = 0$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ τι συμπεραίνετε για την f;*

(2) *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα και μη συνεχής. (a) Είναι η f ολοκληρώσιμη; (β) Υπάρχει $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $F' = f$;*

Θέμα 3. *Έστω* $x_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$ *για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (i) Δείξτε ότι $x_1 = x_2 = 2$ και* $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ *για κάθε $n \geq 2$. (ii) Εξηγείστε γιατί η (x_n) είναι συγκλίνουσα με όριο στο $[0, 2]$. (iii) Υπολογίστε το* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. *(iv) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα δείξτε ότι το όριο της (x_n) δεν μπορεί παρά να είναι το μηδέν.*

Θέμα 4. *(1) Για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ θέτουμε*

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x \; dx$$

(i) Βρείτε τα I_0 και I_1. (ii) Δείξτε ότι $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ *για κάθε $n \geq 2$.*

(2) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Θεωρούμε την συνάρτηση $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \int_a^x f(t) \; dt \cdot \int_x^b g(t) \; dt$$

(i) Δείξτε ότι η h είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της. (ii) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) \int_\xi^b g(t) \; dt = g(\xi) \int_a^\xi f(t) \; dt.$$

ΘΕΜΑ 1:

(1) ΛΑΘΟΣ (πχ. $A = (0, -\infty)$).

(2) ΛΑΘΟΣ ($\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$.

(3) ΛΑΘΟΣ (Θεώρημα Bolzano–Weierstrass: Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία).

(4) ΣΩΣΤΟ (Το $\mathbb{Z}$ αποτελείται από απομονωμένα σημεία και κάθε συνάρτηση είναι συνεχής στα απομονμένα σημεία του πεδίου ορισμού της)

(5) ΣΩΣΤΟ (Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού: Αν $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ τότε $F'(x) = f(x)$ σε κάθε σημείο συνέχειας της f)

ΘΕΜΑ 2:

(1) Συμπεραίνουμε ότι $f = 0$. Πράγματι έστω $x \in \mathbb{R}$. Από την Πυκνότητα των ρητών αριθμών υπάρχει ακολουθία (q_n) ρητών με $q_n \to x$. Από Αρχή Μεταφοράς $f(q_n) \to f(x)$. Επειδή $f(q_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έπεται ότι $f(q_n) \to 0$ και συνεπώς (από μονμαδικότητα του ορίου) $f(x) = 0$.

(2) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα και μη συνεχής. (α) Η f είναι ολοκληρώσιμη ως μονότονη συνάρτηση. (β) Δεν υπάρχει $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $F' = f$. Πράγματι, αν x_0 σημείο ασυνέχειας της f τότε $f(y) \leq \lim_{x\to x_0^-} f(x) < \lim_{x\to x_0^+} f(x) \leq f(z)$ για κάθε $y < x_0 < z$. Άρα η f δεν έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής. Όμως, από το Θεώρημα Darboux κάθε παράγωγος έχει την ιδιότητα αυτή.

ΘΕΜΑ 3:

(i) Άμεσα έχουμε $x_1 = x_2 = 2$. Επίσης, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1$ για κάθε $n \geq 2$, διότι η ακολουθία $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα και άρα $2 = a_1 < a_n$ για κάθε $n \geq 2$.

(ii) Από το (i) η (x_n) είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και άρα είναι συγκλίνουσα ως μονότονη και φραγμένη. Επειδή $0 < x_n \leq 2$ θα πρέπει και $0 \leq \lim x_n \leq 2$.

(iii) Όπως είδαμε στο (i), $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ και άρα $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{e} < 1$. Έστω $\ell = \lim x_n$. Τότε και $\lim x_{n+1} = \ell$ και αν $\ell \neq 0$ τότε $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\ell}{\ell} = 1$ άτοπο. Άρα $\ell = 0$.

ΘΕΜΑ 4:

(1) (i) $I_0 = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$ και $I_1 = \int_0^{2\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0$.

(ii) Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^{n-1} x (\sin x)'\, dx \\
&= [\cos^{n-1} x \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\cos^{n-1} x)' \sin x\, dx \\
&= -(n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (\cos x)' \sin x\, dx = (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x \sin^2 x\, dx \\
&= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x)\, dx \\
&= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x\, dx - (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^n x\, dx \\
&= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n
\end{aligned}$$

και άρα

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}$$

για κάθε $n \geq 2$.

(2) Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Θεωρούμε την συνάρτηση $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \int_a^x f(t)\ dt \cdot \int_x^b g(t)\ dt$$

(i) Έστω $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ και $G(x) = \int_x^b g(t)\,dt$. Τότε $h = F \cdot G$. Επειδή οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι οι F και G είναι παραγωγίσιμες με $F' = f$ και $G' = -g$ (Για την G παρατηρείστε ότι $G(x) = \int_a^b g(t)\ dt - x\int_a^x g(t)\ dt \Rightarrow G'(x) = -\left(\int_a^x g(t)\ dt\right)' = -g(x)$). Άρα

$$h'(x) = (F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)\int_x^b g(t)\ dt - g(x)\int_a^x f(t)\ dt$$

για κάθε $x \in [a,b]$.

(ii) Έχουμε ότι η h είναι παραγωγίσιμη και $h(a) = h(b) = 0$. Άρα από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi)\int_\xi^b g(t)\ dt = g(\xi)\int_a^\xi f(t)\ dt$.