ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ 1/9/2021
ΟΜΑΔΑ Α

Να απαντήσετε σε 4(ΤΕΣΣΕΡΑ) από τα παρακάτω 5 θέματα και να γράφετε Ονοματεπώνυμο και ΑΜ στο γραπτό σας.

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό άνω φραγμένο και $s_0 \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $s > s_0$ ισχύει ότι $X \cap (s, +\infty) = \emptyset$ δείξτε ότι (i) Το s_0 είναι άνω φράγμα του X. (ii) $\sup X \leq s_0$.

(β) Έστω $a, b > 0$ και $Y = \{ax + \frac{b}{x} : x > 0\}$. (i) Δείξτε ότι το Y είναι κάτω φραγμένο και δεν είναι άνω φραγμένο. (ii) Υπολογίστε το $\inf Y$.

ΘΕΜΑ 2. Έστω $0 < \lambda < e$ και έστω η ακολουθία $a_n = \dfrac{\lambda^n n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι:

(i) Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ για όλα τα $n \geq n_0$.

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

(iii) Η (a_n) είναι συγκλίνουσα και $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 3 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(3)}(x) = 12$ δείξτε ότι $x^3 < f(x) < 3x^3$ για αρκετά μεγάλα $x > 0$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με την δεύτερη παράγωγο συνεχή στο 0. Έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) θετικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ και $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} = 1$.

(i) Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)}{x_n} = 1$ και $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$.

(ii) Υπολογίστε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

(iii) Χρησιμοποιώντας τον Τύπο Taylor υπολογίστε την $f''(0)$.

ΘΕΜΑ 4. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση τέτοια ώστε σε κάθε υποδιάστημα I του $[a, b]$ υπάρχουν $x, y \in I$ με $f(x) < 1$ και $f(y) > 2$.

(α) Δείξτε ότι η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας.

(β) Έστω $\underline{I}$ το κάτω ολοκλήρωμα και αντίστοιχα $\overline{I}$ το άνω ολοκλήρωμα της f. Δείξτε ότι $\underline{I} < b - a$ και $\overline{I} > 2(b - a)$.

ΘΕΜΑ 5. Έστω $g : [0, 1] \to [2, 4]$ γνησίως αύξουσα και επί. Έστω επίσης $f = g^{-1}$ η αντίστροφη συνάρτηση της g.

(i) Είναι οι f, g συνεχείς συναρτήσεις?

(ii) Αν η g έχει συνεχή παράγωγο και $\int_0^1 g(x)\, dx = 3$ υπολογίστε το $\int_2^4 f(y)\, dy$. (*Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση* $y = g(x)$, $x \in [0, 1]$.)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ **90** min