ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ
06/02/2019

Θέμα 1. (α) Ισχύουν ή όχι οι εξής προτάσεις και γιατί:
(1) Αν $\lim a_n = a > 0$ τότε η (a_n) είναι τελικά θετική.
(2) Κάθε φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.
(3) Αν (a_n) φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup A$.

Θέμα 2. (α) Βρείτε τα σημεία συνέχειας της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x$ αν x ρητός και $f(x) = 1$ αν x άρρητος.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $y_0 \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχει μια φραγμένη ακολουθία (x_n) με $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = y_0$ δείξτε ότι υπάρχει και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = y_0$.

(γ) Αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.

Θέμα 3. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f' παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών τι συμπέρασμα βγάζετε για την f;

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη με f'' συνεχή.

(i) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Με χρήση του τύπου Taylor δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_n \in [0, 1/n]$ και $\xi'_n \in [-1/n, 0]$ τέτοια ώστε

$$f(\frac{1}{n}) + f(-\frac{1}{n}) = 2f(0) + \frac{f''(\xi_n) + f''(\xi'_n)}{2n^2}.$$

(ii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f(\frac{1}{n}) + f(-\frac{1}{n}) - 2f(0) \right|$.

Θέμα 4. (α) Έστω $k \in \mathbb{N}$. Με βάση το ολοκλήρωμα Riemann κατάλληλης συνάρτησης υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

(β) Με χρήση του γενικού θεωρήματος Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{1 + x^{2019}}}{1 + x^2}\, dx.$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ $\mathbf{2,5}$ ΩΡΕΣ