ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
ΣΕΜΦΕ 2022-2023

Κεφάλαιο 1

Οι πραγματικοί αριθμοί

Ασκηση 1.1. *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.*

(1) *Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο στοιχείο.*
(2) *Αν ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο τότε δεν είναι άνω φραγμένο.*
(3) *Αν ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένο τότε έχει μέγιστο στοιχείο.*
(4) *Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ καλείται άνω φραγμένο αν για κάθε $a \in A$ υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $a \leq M$.*
(5) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, άνω φραγμένο και έστω $s = \sup A$. Τότε ένας αριθμός $M \in \mathbb{R}$ είναι άνω φράγμα του A αν και μόνο αν $M \geq \sup A$.*
(6) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο και έστω $s = \sup A$. Τότε για κάθε $s' < s$ υπάρχει $a \in A$ με $s' < a < s$.*
(7) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό κάτω φραγμένο και $\tau = \inf A$. Τότε για κάθε $\tau' > \tau$ υπάρχει $a \in A$ με $\tau < a < \tau'$.*
(8) *Το άθροισμα ενός οποιουδήποτε ρητού και ενός οποιουδήποτε άρρητου είναι πάντα άρρητος αριθμός.*
(9) *Το γινόμενο ενός οποιουδήποτε ρητού διάφορου του μηδέν και ενός οποιουδήποτε άρρητου είναι πάντα άρρητος αριθμός.*
(10) *Σε κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι αριθμοί.*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώντας το ανοικτό διάστημα $(0,1)$ βλέπουμε ότι οι προτάσεις (1), (2) και (3) είναι ψευδείς.

Η (4) είναι επίσης ψευδής (θέτοντας $M = a + 1$, οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ την ικανοποιεί).

Η (5) είναι αληθής: Πράγματι, αν M άνω φράγμα του A τότε $M \geq \sup A$ αφού $\sup A$ είναι εξ ορισμού το ελάχιστο άνω φράγμα. Αντίστροφα, αν $M \geq \sup A$ τότε $M \geq \sup A \geq a$ για όλα τα $a \in A$ αφού το $\sup A$

είναι άνω φράγμα του A και άρα από την μεταβατική ιδιότητα της διάταξης, $M \geq a$ για όλα τα $a \in A$, οπότε το M είναι άνω φράγμα του A.

Η (6) είναι ψευδής, πχ. A μονοσύνολο. Η σωστή πρόταση λέει ότι για κάθε $s' < s$ υπάρχει $a \in A$ με $s' < a \leq s$.

Ομοίως η (7) είναι ψευδής. Η σωστή πρόταση λέει ότι για κάθε $\tau' > \tau$ υπάρχει $a \in A$ με $\tau \leq a < \tau'$.

Οι (8) και (9) είναι αληθείς. Πράγματι, έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπήρχαν a άρρητος και ρ ρητός τέτοιοι ώστε $a + \rho = \rho'$ με ρ' ρητό. Τότε $a = \rho' - \rho$ και άρα ο a θα ήταν ρητός, άτοπο. Ομοίως για το γινόμενο.

Η (10) είναι αληθής και προκύπτει από την πυκνότητα των ρητών και αρρήτων στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 1.2. *Έστω $a \in \mathbb{R}$ και έστω $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < a\}$. Δείξτε ότι $\sup A = a$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του A έχουμε ότι $x < a$ για κάθε $x \in A$ και άρα το a είναι άνω φράγμα του A. Μένει να δειχθεί ότι είναι και το μικρότερο άνω φράγμα, δηλαδή κάθε αριθμός γνήσια μικρότερος του a δεν είναι άνω φράγμα του a. Πράγματι, έστω $a' < a$. Τότε, από την πυκνότητα των ρητών αριθμών στο $\mathbb{R}$, υπάρχει $x \in \mathbb{Q}$ με $a' < x < a$. Αλλά τότε $x \in A$ οπότε υπάρχει στοιχείο του A που είναι γνήσια μεγαλύτερό του a', με άλλα λόγια το a' δεν είναι άνω φράγμα του A. □

Άσκηση 1.3. *Έστω $K = \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Βρείτε τα $\inf K$ και $\sup K$.*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έχουμε

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = \frac{m^2 + 4n^2}{nm} \geq \frac{4mn}{mn} = 4$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $m = 2n$. Άρα $\inf K = \min K = 4$.

Απο την άλλη μεριά, αν $m = 1$ τότε

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = \frac{1}{n} + 4n \geq 4n$$

και άρα $\sup K = +\infty$.

Άσκηση 1.4. *Έστω $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά με το B φραγμένο. Δείξτε ότι και το A είναι φραγμένο και $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι κάθε άνω (αντ. κάτω) φράγμα του B είναι και άνω (αντ. κάτω) φράγμα του A και άρα αν το B είναι φραγμένο το ίδιο ισχύει και για το A. Ειδικότερα, το $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του B, άρα και του A οπότε $\inf B \leq \inf A$ διότι το $\inf A$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A. Ομοίως, το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A και άρα $\sup A \leq \sup B$ διότι το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A ως άνω φράγμα του B. □

Άσκηση 1.5. *Έστω $S, T \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $s \in S$ και κάθε $t \in T$ ισχύει ότι $s \leq t$. Δείξτε ότι $\sup S \leq \inf T$.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση έπεται ότι κάθε $t \in T$ είναι άνω φράγμα του S, οπότε $\sup S \leq t$ για οποιοδήποτε $t \in T$. Αυτό με την σειρά του σημαίνει ότι το $\sup S$ είναι κάτω φράγμα του T και άρα $\sup S \leq \inf T$ αφού το $\inf T$ είναι εξ ορισμού το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του T. □

Άσκηση 1.6. *Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup A = \inf B$. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με $0 \leq b - a < \epsilon$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Έστω $s = \sup A = \inf B$. Αφού $s = \sup A$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε

$$s - \frac{\epsilon}{2} < a \leq s \tag{1.1}$$

Αντίστοιχα, αφού $s = \inf B$ υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε

$$s \leq b < s + \frac{\epsilon}{2} \tag{1.2}$$

Άρα

$$s - \frac{\epsilon}{2} < a \leq s \leq b < s + \frac{\epsilon}{2}$$

και άρα $0 \leq b - a < \epsilon$. □

Άσκηση 1.7. *Έστω $S \subset \mathbb{R}$ και $s \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

(α) *για κάθε $s' > s$, $S \cap (s', +\infty) = \emptyset$ και*

(β) *για κάθε $s' < s$ $S \cap (s', +\infty) \neq \emptyset$.*

Δείξτε ότι $s = \sup S$.

Απόδειξη. Από το (α) έχουμε ότι κάθε $s' > s$ είναι άνω φράγμα και από το (β) κάθε $s' < s$ δεν είναι άνω φράγμα. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι το s είναι άνω φράγμα του S αφού τότε, από τα παραπάνω, θα είναι το μικρότερο άνω φράγμα. Πράγματι, αν το s δεν ήταν άνω φράγμα του

S τότε θα υπήρχε $x \in S$ με $s < x$. Αλλά τότε για $s' = \dfrac{s+x}{2}$ έχουμε ότι $s < s' < x$ και άρα $x \in S \cap (s', +\infty)$. Οπότε $S \cap (s', +\infty) \neq \emptyset$, άτοπο από το (α). □

Ασκηση 1.8. *(α) Δείξτε ότι κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει μέγιστο στοιχείο.*

(β) Ομοίως δείξτε ότι κάθε κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει ελάχιστο.

(γ) (Αρχή της Καλής Διάταξης του $\mathbb{N}$) Δείξτε ότι κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Αποδειξη. (α) Αρκεί να δειχθεί ότι κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ περιέχει το supremum του. Πράγματι, έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπήρχε $A \subseteq \mathbb{Z}$ μη κενό άνω φραγμένο με $\sup A \notin A$. Έστω $s = \sup A$. Το $s - 1$ δεν είναι άνω φράγμα του A (αφού είναι γνήσια μικρότερο του s που είναι το ελάχιστο άνω φράγμα) και άρα υπάρχει $a_1 \in A$ με $s - 1 < a_1 \leq s$. Επειδή υποθέσαμε ότι $s \notin A$ έχουμε $a_1 \neq s$ και άρα $a_1 < s$. Συνεπώς και το a_1 δεν είναι άνω φράγμα του A και άρα ομοίως υπάρχει $a_2 \in A$ με $a_1 < a_2 < s$. Άρα $s - 1 < a_1 < a_2 < s$ οπότε $0 < a_2 - a_1 < s - (s-1) = 1$, άτοπο αφού a_1, a_2 ακέραιοι αριθμοί.

(β) Αποδεικνύεται ανάλογα με το (α) (χρησιμοποιώντας το $\inf A$).

(γ) Κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι κάτω φραγμένο (από το 1) υποσύνολο του Z. Άρα από το (β) θα έχει ελάχιστο.

□

Ασκηση 1.9. *(Μια απόδειξη της ύπαρξης του infimum σε μη κενά κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και κάτω φραγμένο. Θέτουμε L να είναι το σύνολο των κάτω φραγμάτων του A.*

1. *Δείξτε ότι το L είναι άνω φραγμένο. Ειδικότερα, οποιοδήποτε στοιχείο του A είναι άνω φράγμα του L.*
2. *Δείξτε ότι το $\sup L$ (που υπάρχει από το (1) και την ιδιότητα πληρότητας του $\mathbb{R}$) ανήκει στο L και άρα $\sup L = \max L$. Συνεπώς υπάρχει το μέγιστο του L, με άλλα λόγια υπάρχει το μέγιστο κάτω φράγμα του A.*

Αποδειξη. (1) Έστω $a \in A$. Τότε για κάθε $m \in L$, $m \leq a$, αφού κάθε $m \in L$ είναι κάτω φράγμα του A. Άρα το a είναι άνω φράγμα του L.

(2) Αν το $\sup L$ δεν ανήκει στο L τότε από τον ορισμό του L, έχουμε ότι το $\sup L$ δεν είναι κάτω φράγμα του A. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $a_0 \in A$ με $a_0 < \sup L$. Αλλά τότε το $a_0 \in A$ ως γνήσια μικρότερο του ελάχιστου άνω φράγματος του L, δεν είναι άνω φράγμα του L, άτοπο από το (1). Άρα $\sup L \in L$ οπότε το $\sup L$ είναι το μέγιστο στοιχείο του L. □

Ασκηση 1.10. *Έστω S και T δύο μη κενά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών και θέτουμε*

$$S + T = \{s + t : S \in S, t \in T\}.$$

Δείξτε ότι αν τα S και T είναι άνω φραγμένα, τότε

$$\sup(S + T) = \sup S + \sup T.$$

Αποδειξη. Επειδή $s \leq \sup S$ για κάθε $s \in S$ και ομοίως $t \leq \sup T$ για κάθε $t \in T$ έχουμε ότι $s+t \leq \sup S+\sup T$ για κάθε $s \in S$ και κάθε $t \in T$ και άρα το $\sup S + \sup T$ είναι άνω φράγμα του $S + T$. Μένει να δειχθεί ότι το $\sup S + \sup T$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $S + T$. Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $x < \sup S+\sup T$. Θέτουμε $\epsilon = \sup S+\sup T - x > 0$. Επειδή $\sup S - \dfrac{\epsilon}{2} < \sup S$ υπάρχει $s \in S$ με $s > \sup S - \dfrac{\epsilon}{2}$. Ομοίως υπάρχει $t \in T$ με $t > \sup T - \dfrac{\epsilon}{2}$. Άρα

$$s + t > \left(\sup S - \frac{\epsilon}{2}\right) + \left(\sup T - \frac{\epsilon}{2}\right) = \sup S + \sup T - \epsilon = x$$

Άρα υπάρχει στοιχείο του $S + T$ γνήσια μεγαλύτερο του x, δηλαδή το x δεν είναι άνω φράγμα του $S+T$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι το $\sup S+\sup T$ είναι άνω φράγμα του $S+T$ και κάθε αριθμός μικρότερος του $\sup S+\sup T$ δεν είναι. Άρα το $\sup S+\sup T$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $S+T$, δηλαδή $\sup S + \sup T = \sup(S + T)$. □

Ασκηση 1.11. *Δείξτε ότι $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Αποδειξη. Έστω $p(n)$ η πρόταση $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$. Για $n = 1$ έχουμε $1 = 1^2$ και άρα η $p(1)$ ισχύει. Έστω ότι η $p(n)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και η $p(n + 1)$. Πράγματι, $1+\cdots+(2n-1)+(2(n+1) - 1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$. Άρα η $p(1)$ ισχύει και $p(n) \Rightarrow p(n+1)$. Από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής η πρόταση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Άσκηση 1.12. *(α) Αν x, x' θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $x < 1$ και $x' > 1$ δείξτε ότι $x + x' > xx' + 1$.*

(β) Με επαγωγή και χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αν $x_1, \ldots, x_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με γινόμενο $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$ τότε $x_1 + \cdots + x_n \geq n$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (β) δείξτε την ανισότητα γεωμετρικού-αριθμητικού μέσου): Αν $a_1, \ldots, a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $a_1 = \cdots = a_n$.

Απόδειξη. (α) Είναι $1 - x > 0$ και $x' - 1 > 0$. Άρα $(1 - x)(x' - 1) > 0 \Leftrightarrow x' - 1 - xx' + x > 0 \Leftrightarrow x + x' > xx' + 1$.

(β) Έστω $p(n)$ η πρόταση: *Αν $x_1, \ldots, x_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 \ldots x_n = 1$ τότε $x_1 + \cdots + x_n \geq n$.*

Για $n = 1$ η $p(1)$ ισχύει αφού $x_1 = 1 \Rightarrow x_1 \geq 1$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι η $p(n)$ ισχύει. Θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και η $p(n+1)$. Πράγματι, έστω

$$x_1, \ldots, x_{n+1} > 0 \text{ τέτοιοι ώστε } x_1 \ldots x_{n+1} = 1$$

Θα δείξουμε ότι

$$x_1 + \cdots + x_{n+1} \geq n + 1$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1</u>: $x_{n+1} = 1$. Τότε $x_1 \ldots x_n = x_1 \ldots x_{n+1} = 1$ και άρα από την $p(n)$ έχουμε $x_1 + \cdots + x_n \geq n$. Άρα $x_1 + \cdots + x_{n+1} \geq n + 1$

<u>Περίπτωση 2</u>: $x_{n+1} \neq 1$. Τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_n > 1$ και $x_{n+1} < 1$. Από το (α) έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_{n+1} &= x_1 + \cdots + x_{n-1} + (x_n + x_{n+1}) \\ &> x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} + 1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Από την $p(n)$ παίρνουμε ότι

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n \tag{1.4}$$

Από (1.3) και (1.4) έχουμε ότι $x_1 + \cdots + x_{n+1} > n + 1$.

Από τις παραπάνω περιπτώσεις μπορούμε επίσης να δούμε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

(γ) Θέτουμε $a = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$ και έστω $x_i = \dfrac{a_i}{a}$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Τότε $x_1 \dots x_n = 1$ και άρα από το (β),

$$x_1 + \cdots + x_n \geq n \Rightarrow \frac{a_1 + \cdots + a_n}{a} \geq n \Rightarrow \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = \cdots = x_n = 1 \Leftrightarrow a_1 = \cdots = a_n$. □

Άσκηση 1.13. *Δείξτε ότι κάθε μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ με $|A|$ θα συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του A. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του συνόλου. Αν $|A| = 1$ ισοδύναμα $A = \{a\}$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ τότε $\min A = \max A = a$. Έστω τώρα ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $|A| = n$ ισχύει ότι το A έχει μέγιστο και ελάχιστο. Θα δείξουμε ότι τότε το ίδιο ισχύει και γαι οποιοδήποτε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $|A| = n+1$. Πράγματι, έστω $A = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $n+1$ στοιχεία. Θέτουμε $A' = \{x_1, \dots, x_n\}$. Επειδή $|A'| = n$ από την επαγωγική μας υπόθεση το A' έχει μέγιστο ($\max A'$) και ελάχιστο ($\min A'$). Είναι τώρα εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο μεγαλύτερος από τους $\max A'$ και x_{n+1} είναι το $\max A$ και αντίστοιχα ο μικρότερος από τους $\min A'$ και x_{n+1} είναι το ελάχιστο του A. □

Άσκηση 1.14. *Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 1.13 δώστε μια εναλλακτική απόδειξη της Αρχής Καλής Διάταξης του $\mathbb{N}$ (δείτε και Άσκηση 1.8) : Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό. Αφού το A είναι μη κενό μπορούμε να επιλέξουμε ένα στοιχείο του $n_0 \in A$. Ορίζουμε το σύνολο $A' = A \cap \{1, \dots, n_0\} = \{a \in A : a \leq n_0\}$. Το A' έχει το πολύ n στοιχεία και άρα είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ μη κενό αφού περιέχει το n_0. Από την Άσκηση 1.13 έχουμε ότι το A' έχει ελάχιστο στοιχείο. Έστω $m = \min A'$. Ισχυριζόμαστε ότι $m = \min A$. Πράγματι, καταρχάς $m \in A' \subseteq A$ και άρα $m \in A$. Επίσης έστω a ένα οποιοδήποτε στοοιχείο του A. Τότε είτε $a \leq n_0$ είτε $a > n_0$. Αν $a \leq n_0$ έχουμε ότι $a \in A \cap \{1, \dots, n_0\} = A'$ και άρα $m \leq a$. Αν $a > n_0$ τότε $m \leq n_0 < a$ και άρα $m < a$. Συνεπώς, $m \in A$ και $m \leq a$ για όλα τα $a \in A$. Άρα $m = \min A$. □

Άσκηση 1.15. *Έστω $S \subseteq \mathbb{Q}$ με τις εξής ιδιότητες:*

(α) *Το S είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή για κάθε $x, y \in S$ $x + y \in S$ και $xy \in S$.*

(β) $0 \notin S$.

(γ) *Για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ με $x \neq 0$ ακριβώς ένα από τα επόμενα συμβαίνει: Είτε $x \in S$ ή $-x \in S$.*

Δείξτε τα επόμενα

(1) $N \subseteq S$,

(2) *για κάθε* $m \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{m} \in S$,

(3) *Το S είναι το σύνολο όλων των θετικών ρητών.*

Απόδειξη. (1) Θα δείξουμε ότι $\mathbb{N} \subseteq S$ με Επαγωγή. Έχουμε,

$\underline{1 \in S}$: Από την (γ) έχουμε ότι είτε $1 \in S$ ή $-1 \in S$. Αν $-1 \in S$ τότε από την (α) για $x = y = -1$ θα έπρεπε και $(-1)(-1) = 1 \in S$ οπότε πάλι από την (α) για $x = +1$ και $y = -1$, θα είχαμε ότι $(+1) + (-1) = 0 \in S$ άτοπο από την (β). Συνεπώς, $1 \in S$.

$\underline{x \in S \implies x + 1 \in S}$: Άμεσο από την (I) και την (α).

Άρα απο την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής έχουμε ότι $\mathbb{N} \subseteq S$.

(2) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{m} \in S$.

Πράγματι, έστω $m \in \mathbb{N}$. Από την (γ) είτε $\dfrac{1}{m} \in S$ ή $-\dfrac{1}{m} \in S$. Αν $-\dfrac{1}{m} \in S$, τότε από την (α) και το (1), θα είχαμε $m \cdot \left(-\dfrac{1}{m}\right) = -1 \in S$ άτοπο (αφού $1 \in S$).

(3) <u>Ισχυρισμός 1</u>: Κάθε θετικός ρητός ανήκει στο S:

Πράγματι, κάθε θετικός ρητός q γράφεται στην μορφή $q = \dfrac{n}{m} = n \cdot \dfrac{1}{m}$ με $n, m \in \mathbb{N}$ και άρα, από την (α) και τα (1), (2) έπεται ότι $q \in S$.

<u>Ισχυρισμός 2</u>: Κάθε μη θετικός ρητός δεν ανήκει στο S.

Πράγματι, αν $q = 0$ τότε $q \notin S$ από την (β). Αν τώρα q αρνητικός ρητός τότε $-q$ θετικός ρητός και άρα από το (α) $-q \in S$. Συνεπώς από την (γ), $q \notin S$. $\square$

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες

Ασκηση 2.1. *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.*

(1) *Αν η (a_n) είναι φραγμένη τότε είναι και συγκλίνουσα.*
(2) *Αν η (a_n^2) συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.*
(3) *Αν η (a_n^3) συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.*
(4) *Αν η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών τότε η (a_n) συγκλίνει.*
(5) *Αν $a_n \to a$ με $a < 1$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_n < 1$ για κάθε $n \geq n_0$.*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(1) ΛΑΘΟΣ, πχ. $a_n = (-1)^n$.
(2) Ομοίως ΛΑΘΟΣ, πχ. $a_n = (-1)^n$.
(3) ΣΩΣΤΟ, $a_n^3 \to a \Rightarrow \sqrt[3]{a_n^3} \to \sqrt[3]{a} \Rightarrow a_n \to \sqrt[3]{a}$.
(4) ΣΩΣΤΟ, επειδή η (a_n) είναι και κάτω φραγμένη (από το μηδέν).
(5) ΣΩΣΤΟ, για $\epsilon = 1 - a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \epsilon \Rightarrow a_n < a + \epsilon < a + 1 - a = 1$, για κάθε $n \geq n_0$.

Ασκηση 2.2. *Έστω $a_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν (a'_n) ακολουθία που διαφέρει από την (a_n) σε πεπερασμένο πλήθος όρων δείξτε ότι $a'_n \to a$.*

Αποδειξη. Αφού η (a'_n) διαφέρει από την (a_n) σε πεπερασμένο πλήθος όρων υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n = a'_n$ για κάθε $n \geq m_0$. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $a_n \to a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \epsilon$. Θέτουμε $n'_0 = \max(m_0, n_0)$. Τότε για κάθε $n \geq n'_0$ έχουμε $|a'_n - a| = |a_n - a| < \epsilon$, αφού $a_n = a'_n$ και $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n'_0 \in \mathbb{N}$ με $|a'_n - a| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n'_0$ οπότε $a'_n \to a$. □

Ασκηση 2.3. *Δείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας ακολουθίας ρητών.*

Αποδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $q_1 \in \mathbb{Q}$ με $q_1 \in (x-1, x+1)$, $q_2 \in \mathbb{Q}$ με με $q_2 \in (x - 1/2, x + 1/2)$ και γενικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$

επιλέγουμε $q_n \in \mathbb{Q}$ με $q_n \in \left(x - \dfrac{1}{n}, x + \dfrac{1}{n}\right)$ (αυτό μπορούμε να το κάνουμε λόγω της πυκνότητας των ρητών στο $\mathbb{R}$). Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $x - \frac{1}{n} < q_n < x + \frac{1}{n}$. Επειδή $x \pm \frac{1}{n} \to x$, από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών παίρνουμε $q_n \to x$. □

Άσκηση 2.4. *(α) Δείξτε ότι*

$$a_n \to a \Leftrightarrow |a_n - a| \to 0$$

(β) Συμπεράνετε ότι

$$a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$$

(γ) Δείξτε την συνεπαγωγή $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$. Ισχύει για $a \neq 0$ η ισοδυναμία;

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου έχουμε

$$a_n \to a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0 \ \ |a_n - a| < \epsilon \tag{2.1}$$

και αντίστοιχα θέτοντας $b_n = |a_n - a|$,

$$b_n \to 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0 \ \ |b_n - 0| = b_n < \epsilon \tag{2.2}$$

ή ισοδύναμα

$$|a_n - a| \to 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0 \ \ |a_n - a| < \epsilon \tag{2.3}$$

Από (2.1) και (2.3) έχουμε το ζητούμενο.

(β) Θέτουμε $a = 0$.

(γ) Από την ανισότητα $||x| - |y|| \leq |x - y|$ έχουμε

$$\begin{aligned} a_n \to a &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0 \ \ |a_n - a| < \epsilon \\ &\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0 \ \ ||a_n| - |a|| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow |a_n| \to |a| \end{aligned}$$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει, πχ. αν $a_n = (-1)^n$ τότε $|a_n| = 1 \to 1$ αλλά η (a_n) δεν συγκλίνει. □

Άσκηση 2.5. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο. Δείξτε ότι υπάρχουν ακολουθίες (x_n) και (y_n) στο A τέτοιες ώστε $x_n \to \inf A$ και $y_n \to \sup A$.*

Απόδειξη. Έστω $s = \sup A$ και $\tau = \inf A$. Έστω επίσης ένας οποιοσδήποτε $n \in \mathbb{N}$. Από τις ιδιότητες των $\sup A$ και $\inf A$ μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in A$ και $y_n \in A$ τέτοια ώστε

$$\tau \leq x_n < \tau + \frac{1}{n} \quad \text{και} \quad s - \frac{1}{n} < y_n \leq s$$

Από το Θεώρημα τω Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει ότι $x_n \to \tau$ και $y_n \to s$. □

Άσκηση 2.6. *Έστω (a_n) ακολουθία με $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η (a_n) είναι συγκλίνουσα δείξτε ότι είναι τελικά σταθερή.*

Απόδειξη. Έστω ότι $a_n \to a$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Τότε για $\epsilon = 1/2$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - a| < 1/2$ και άρα

$$|a_{n_0} - a_n| = |a_{n_0} - a + a - a_n| \leq |a_{n_0} - a| + |a - a_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Συνεπώς κάθε όρος a_n με $n > n_0$ απέχει από τον ο a_{n_0} απόσταση γνήσια μικρότερη του 1. Επειδή $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αυτό σημαίνει ότι $a_n = a_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή η (a_n) είναι τελικά σταθερή. □

Άσκηση 2.7. *Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Αν $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ δείξτε ότι $a_n \to 0$.*

Απόδειξη. Αφού $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή η (a_n) είναι τελικά φθίνουσα ακολουθία. Επειδή είναι και κάτω φραγμένη από το μηδέν θα είναι συγκλίνουσα με $\lim a_n \geq 0$. Αλλά αν $\lim a_n \neq 0$ τότε $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{a} = 1$ άτοπο. □

Άσκηση 2.8. *Βρείτε το όριο (αν υπάρχει) των παρακάτω ακολουθιών:*

(1) $a_n = \dfrac{4n^2 - n + 2}{n^2 + 7n - 3}$.

(2) $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

(3) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, *όπου* $0 \leq a \leq b \leq c$.

(4) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(5) $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

(6) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

(7) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Αποδειξη. (1) Έχουμε

$$a_n = \frac{4n^2 - n + 2}{n^2 + 7n - 3} = \frac{n^2(4 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2})}{n^2(1 + \frac{7}{n} - \frac{3}{n^2})}$$
$$= \frac{4 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{7}{n} - \frac{3}{n^2}} \to \frac{4}{1} = 4$$

(2) Επειδή

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

από το Θεώρημα Ισοσσυγκλινουσών Ακολουθιών, $\dfrac{\sin n}{n} \to 0$.

(3) Επειδή , όπου $0 \leq a \leq b \leq c$, έχουμε ότι

$$c \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{3}c$$

Επιπλέον, $\sqrt[n]{3} \to 1$ και άρα από το Θεώρημα Ισοσσυγκλινουσών Ακολουθιών, έπεται ότι $\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \to c$.

(4) Είναι

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
$$= \frac{n + 1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

οπότε

$$0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

και άρα από το Θεώρημα Ισοσσυγκλινουσών Ακολουθιών, έπεται ότι $a_n \to 0$.

(5) Παρατηρούμε ότι

$$a_n = \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right)^n$$
$$= \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to e^2$$

αφού $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to e$.

(6) Έχουμε ότι $1 < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα

$$1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < e$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε παίρνοντας n-οστές ρίζες,

$$1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n} < \sqrt[n]{e}$$

Επειδή $\sqrt[n]{a} \to 1$ για κάθε $a > 0$, από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών έπεται ότι $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n \to 1$.

(7) Από την Ανισότητα Bernoulli έχουμε

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1 + n^2\frac{1}{n} = 1+n$$

και άρα $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty$.

□

Άσκηση 2.9. *Έστω $a > 0$. Επιλέγουμε $x_1 > \sqrt{a}$ και έστω (x_n) η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{a}{x_n}\big)$$

Δείξτε τα εξής: (α) $x_n \geq \sqrt{a}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, (β) $\dfrac{a}{x_n} \leq x_{n+1} \leq x_n$ (γ) $x_n \to \sqrt{a}$.

Απόδειξη. (α) Από την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{a}{x_n}\big) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$$

(β) Από το (α) έχουμε

$$x_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow x_n^2 \geq a \Rightarrow x_n \geq \frac{a}{x_n}$$

και άρα επειδή ο x_{n+1} είναι ο μέσος όρος των x_n και $\dfrac{a}{x_n}$ θα πρέπει

$$\frac{a}{x_n} \leq x_{n+1} \leq x_n$$

(γ) Από το (β) έχουμε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα. Επειδή είναι και κάτω φραγμένη (αφού $x_n > \sqrt{a}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$) θα είναι και συγκλίνουσα με $x = \lim x_n \geq \sqrt{a} > 0$. Επιπλέον, η (x_{n+1}) είναι υπακολουθία της (x_n) και άρα $\lim x_{n+1} = x$. Άρα

$$x = \lim x_{n+1} = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \Rightarrow 2x = x + \frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 = a$$

Επειδή όπως είδαμε $x > 0$ έχουμε ότι $x = \sqrt{a}$. □

Άσκηση 2.10. *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\frac{x^n}{n!} \to 0$.*

Απόδειξη. Έστω $x > 0$. Έστω $n_0 = [x]$. Τότε για κάθε $n > n_0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{x^n}{n!} &= \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdots \frac{x}{n_0} \cdot \frac{x}{n_0+1} \cdot \frac{x}{n_0+2} \cdot \cdots \cdot \frac{x}{n} \\
&= \frac{x^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{x}{n_0+1} \cdot \frac{x}{n_0+2} \cdot \cdots \cdot \frac{x}{n} \\
&\leq \frac{x^{n_0}}{n_0!} \cdot \left(\frac{x}{n_0+1}\right)^{n-n_0} \\
&= \frac{(n_0+1)^{n_0}}{n_0!} \cdot \left(\frac{x}{n_0+1}\right)^{n}
\end{aligned}$$

Άρα, θέτοντας

$$c = \frac{(n_0+1)^{n_0}}{n_0!} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{x}{n_0+1} = \frac{x}{[x]+1}$$

έχουμε

$$0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq c \cdot \lambda^n$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $0 < \lambda < 1$, έχουμε ότι $\lambda^n \to 0$ και άρα από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\frac{x^n}{n!} \to 0$.

Για $x = 0$ είναι προφανές. Αν τώρα $x < 0$ τότε

$$-\frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{x^n}{n!} \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

και το ζητούμενο έπεται από την προηγούμενη περίπτωση και το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών. □

Άσκηση 2.11. *(α) Δείξτε ότι η ακολουθία $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ είναι γνησίως φθίνουσα με όριο το e.*

(β) Δείξτε ότι

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Δείξτε ότι

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

Ισοδύναμα, έχουμε την εξής προσέγγιση του $n!$,

$$\frac{(n+1)^n}{e^n} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. (α) Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} &= \frac{\frac{n^n}{(n-1)^n}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}} \\ &= \frac{n^{2n+1}}{(n^2-1)^n(n+1)} \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\ &\geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} \quad \text{(Ανισότητα Bernoulli)} \\ &= \frac{(n^2-1+n)n}{(n^2-1)(n+1)} = \frac{n^3-n+n^2}{n^3+n^2-n-1} > 1 \end{aligned}$$

Άρα η (b_n) είναι φθίνουσα. Επιπλέον,

$$\lim b_n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$$

(β) Όπως είναι γνωστό η ακολουθία $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα και το όριό της ορίζεται να είναι ο e. Άρα $e = \sup a_n$ και άρα $e \geq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αντίστοιχα από το (α) έχουμε $e = \inf b_n$ και άρα $e \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ακριβέστερα, επειδή η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα και η (b_n) γνησίως φθίνουσα θα πρέπει $a_n < e < b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Από το (β) παίρνουμε

$$\begin{gathered}
\frac{2}{1} < e < \left(\frac{2}{1}\right)^2 \\
\left(\frac{3}{2}\right)^2 < e < \left(\frac{3}{2}\right)^3 \\
\left(\frac{4}{3}\right)^3 < e < \left(\frac{4}{3}\right)^4 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}
\end{gathered}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, έχουμε

$$\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e^n < \left(\frac{2}{1}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^4\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

και άρα

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

$\square$

Κεφάλαιο 3

Συνεχείς Συναρτήσεις

Άσκηση 3.1. *(α) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

(β) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είτε $f(x) = 1$ ή $f(x) = -1$. Άρα η f είναι μια συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ που παίρνει το πολύ δύο τιμές. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών η f δεν μπορεί να λαμβάνει και τις δύο τιμές γιατί τότε θα υπήρχε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$, άτοπο. Άρα είτε $f(x) = 1$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ είτε $f(x) = -1$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι δύο:

$$\text{Η σταθερή } f_1 = 1 \text{ και η σταθερή } f_2 = 1$$

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) - x^2 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = |x|$. Ειδικότερα, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και άρα, από Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών, η f διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι οι εξής τέσσερεις:

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = -x,\ f_3(x) = |x|,\ f_4(x) = -|x|$$

□

Άσκηση 3.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.*

(α) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq \theta$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αντίστοιχα, αν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq -\theta$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Αν $|f(x)| > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε ακριβώς ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα συμβαίνει: Είτε 1) $f(x) \geq \theta$ για κάθε $x \in [a, b]$, ή (2) $f(x) \leq -\theta$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Απόδειξη. (α) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ θα πρέπει να λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Δηλαδή, υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $\theta = f(x_0) > 0$ έχουμε το ζητούμενο. Όμοια για $f(x_0) < 0$.

(β) Αφού $|f(x)| > 0$ έπεται ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα η f θα διατηρεί πρόσημο, διότι διαφορετικά, από Θεώρημα Bolzano, θα υπήρχε σημείο που θα μηδενιζόταν. Άρα είτε $f(x) > 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ είτε $f(x) < 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ και το συμπέρασμα έπεται από το (α) ερώτημα. □

Άσκηση 3.3. *(a) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(q) = 0$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, δείξτε ότι $f = 0$.*

(β) Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $f(q) = g(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, δείξτε ότι $f = g$.

Απόδειξη. (α) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε λόγω πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$, υπάρχει ακολουθία ρητών (x_n) με $x_n \to x$. Αφού η f είναι συνεχής, από Αρχή Μεταφοράς θα έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x)$. Όμως, αφού $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε ότι $f(x) = 0$. Συνεπώς, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Θεωρούμε την $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $h(x) = f(x) - g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και εφαρμόζουμε το (α).

□

Άσκηση 3.4. *(a) Έστω $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ f_2(x), & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}.$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.
(2) *Η f είναι συνεχής στο x_0.*

(β) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Βρείτε τα σημεία συνέχειας της f.

Αποδειξη. (α) (1) $\Rightarrow$ (2): Έστω ότι $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ και άρα

$$f(x_0) = f_1(x_0) = f_2(x_0) \tag{3.1}$$

ανεξάρτητα αν το x_0 είναι ρητός ή άρρητος.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνέχειας για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ θα βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ αν } |x - x_0| < \delta \tag{3.2}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Αφού η $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| < \epsilon \text{ αν } |x - x_0| < \delta_1 \tag{3.3}$$

Ομοίως, αφού η f_2 είναι συνεχής θα υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_2(x) - f_2(x_0)| < \epsilon \text{ αν } |x - x_0| < \delta_2 \tag{3.4}$$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ και ισχυριζόμαστε ότι ικανοποιεί την (3.2). Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τον x:

Περίπτωση 1: Ο x είναι ρητός. Τότε $f(x) = f_1(x)$ και άρα επειδή $\delta \leq \delta_1$, από τις (3.1) και (3.3), έπεται ότι $|f(x) - f(x_0)| = |f_1(x) - f_1(x_0)| < \epsilon$.

Περίπτωση 2: Ο x είναι άρρητος. Τότε $f(x) = f_2(x)$ και άρα επειδή $\delta \leq \delta_2$, από τις (3.1) και (3.4), έπεται ότι $|f(x)-f(x_0)| = |f_2(x)-f_2(x_0)| < \epsilon$.

Άρα η (3.2) ικανοποιείται και η f είναι συνεχής στο x_0.

(2) $\Rightarrow$ (1): Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω (x_n) και (y_n) δύο ακολουθίες από ρητούς και άρρητους αντίστοιχα τέτοιες ώστε $\lim x_n = \lim y_n = x_0$. Από Αρχή Μεταφοράς, έχουμε ότι

$$f_1(x_0) = \lim f_1(x_n) = \lim f(x_n) = f(x_0) = \lim f(y_n) = \lim f_2(x_n) = f_2(x_0)$$

(β) Από το (α) έχουμε ότι τα σηείά συνέχειας της f θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 = x$. Άρα τα σημεία συνέχειας της f είναι τα σηεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$. □

Ασκηση 3.5. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η f λαμβάνει μέγιστη τιμή.*

Αποδειξη. Αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, υπάρχει $m < 0$ τέτοιο ώστε

$$x < m \Rightarrow f(x) < f(0)$$

Ομοίως, αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$x > M \Rightarrow f(x) < f(0)$$

Επειδή η f είναι συνεχής, υπάρχει $x_0 \in [m, M]$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [m, M]$$

Ειδικότερα, $f(0) < f(x_0)$ και άρα από τα παραπάνω έπεται ότι $f(x) < f(x_0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

Άσκηση 3.6. *(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φθίνουσα συνάρτηση. Αν $g(x) = f(x) - x$ δείξτε ότι η g είναι φθίνουσα και $g(x) \cdot g(f(x)) \leq 0$, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.*

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = x$.

Απόδειξη. (α) Η $g(x) = f(x) - x = f(x) + (-x)$ είναι φθίνουσα ως άθροισμα φθίνουσων συναρτήσεων. Έστω τώρα ένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $x \geq f(x)$, τότε αφού η f είναι φθίνουσα θα έχουμε $f(x) \leq f(f(x))$ και άρα $g(f(x)) = f(f(x)) - f(x) \geq 0$. Επίσης, επειδή $x \geq f(x)$ θα έχουμε ότι $g(x) = f(x) - x \leq 0$ και άρα $g(x) \cdot g(f(x)) \leq 0$. Όμοια, για $x \leq f(x)$ θα είναι $g(f(x)) \leq 0$ και $g(x) \geq 0$. Συνεπώς, $g(x) \cdot g(f(x)) \leq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Παρατηρούμε ότι η f έχει το πολύ ένα σταθερό σημείο, αφού αν υπήρχαν δύο σταθερά σημεία, έστω $x_1 < x_2$, επειδή η f είναι φθίνουσα θα είχαμε $x_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = x_2$, άτοπο. Επίσης παρατηρούμε ότι ένα $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερό σημείο για την f αν και μόνο αν $g(x) = f(x) - x = 0$ και άρα αρκεί να δείξουμε ότι η g μηδενίζεται σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε λόγω συνέχειας, η g θα διατηρεί πρόσημο. Ειδικότερα, θα είχαμε $g(x)g(f(x)) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, άτοπο από το (α). □

Άσκηση 3.7. *Μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, I διάστημα του $\mathbb{R}$ καλείται Lipschitz αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

για όλα τα $x, y \in I$.

(α) Δείξτε ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι συνεχής.

(β) Αν f παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο δείξτε ότι η f είναι Lipschitz.

(γ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ δεν είναι Lipschitz.

Απόδειξη. (α) Έστω $x_0 \in I$ και $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \epsilon / C$. Τότε

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < C|x - x_0| < \epsilon$$

(β) Έστω $|f'(x)| \leq C$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $x, y \in I$ με $x \neq y$, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, υπάρχει ξ μεταξύ των x και y τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| &= |f'(\xi)| \leq C \\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| &\leq C|x - y| \end{aligned}$$

(γ) Έστω προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C|x - y|$, για κάθε $x, y \geq 0$. Ειδικότερα, αν $y = 0$ τότε

$$\sqrt{x} \leq Cx \Rightarrow x \leq C^2 x^2 \Rightarrow \frac{1}{C^2} \leq x \text{ για κάθε } x > 0,$$

που φυσικά είναι αδύνατον (πχ. $x = \dfrac{1}{2C^2}$). □

Κεφάλαιο 4

Παράγωγος

Άσκηση 4.1. *Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Ισχύει το αντίστροφο ?*

Απόδειξη. **<u>α΄ τρόπος:</u>** Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε καταρχάς ότι η f είναι $1-1$ (Πράγματι, έστω $x_1\neq x_2$. Τότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ξ μεταξύ των x_1,x_2 με $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)$ και άρα, αφού $f'(\xi)\neq 0$ έπεται ότι $f(x_1)\neq f(x_2)$). Τώρα από γνωστό Θεώρημα η f ως συνεχής και $1-1$ είναι γνησίως μονότονη.

<u>β΄ τρόπος:</u> Από το Θεώρημα Darboux (που λέει ότι η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης ικανοποιεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών), έπεται ότι αν η f' δεν μηδενίζεται τότε θα διατηρεί πρόσημο. Άρα είτε $f'(x)>0$ για όλα τα $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα ή $f'(x)<0$ για όλα τα $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ. η $f(x)=x^3$ είναι γνησίως μονότονη αλλά $f'(0)=0$. □

Άσκηση 4.2. *Βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f'(x)\in\mathbb{N}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αν η f' λαμβάνει δύο διαφορετικές τιμές, τότε θα λαμβάνει και τιμές εκτός του $\mathbb{N}$ αφού ικανοποιεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών (Θεώρημα Darboux). Άρα αν $f'(x)\in\mathbb{N}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα πρέπει η $f'=c_0$ να είναι σταθερή και άρα υπάρχουν $c_0\in\mathbb{N}$ και $c_1\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)=c_0x+c_1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. □

Άσκηση 4.3. *Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο*

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\leq 0\\ -x+1, & \text{αν } x>0\end{cases}$$

Δείξτε ότι δεν υπάρχει $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $F'=f$.

Αποδειξη. Κάνοντας την γραφική παράσταση της f βλέπουμε ότι η f δεν ικανοποιεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών, πχ. $f(0) = 0$, $f(1/2) = 1/2$ και δεν υπάρχει $x \in (0, 1/2)$ με $f(x) = 1/4$. Άρα, από Θεώρημα Darboux, δεν μπορεί η f να είναι η παράγωγος κάποιας συνάρτησης. $\square$

Ασκηση 4.4. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Αν το $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ υπάρχει δείξτε ότι η παράγωγος της f ορίζεται και στο x_0 και $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$.*

Αποδειξη. Από τον ορισμό της Παραγώγου στο x_0,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επειδή η f είναι συνεχής το παραπάνω όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον Κανόνα Hospital έχουμε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

Άρα, $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$. $\square$

Ασκηση 4.5. *Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, αν $x \neq 0$ με $f(0) = 0$ είναι παραγωγίσιμη και το όριο $\lim_{x \to 0} f'(x)$ δεν υπάρχει.*

Αποδειξη. Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Επίσης για $x = 0$ έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(από Θεώρημα Παρεμβολής, αφού $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$). Τέλος, για να διαπιστώσουμε ότι το όριο

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

δεν υπάρχει, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Μεταφοράς θεωρώντας τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ και $y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi}$. Έχουμε $x_n, y_n \neq 0$, $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = 0$ και $\lim_{n \to \infty} f'(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} f'(y_n)$ αφού $f(x_n) = -1$ και $f(y_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Άσκηση 4.6. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η f' δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 δείξτε ότι ένα τουλάχιστον από τα δύο πλευρικά όρια $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ δεν υπάρχει.*

Απόδειξη. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι η f' δεν είναι συνεχής στο x_0 αλλά τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ και $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ υπάρχουν. Από τον ορισμό της $f'(x_0)$ έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Άρα από κανόνα Hospital,

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$. Άρα

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = f'(x_0)$$

δηλαδή η f' είναι συνεχής στο x_0, άτοπο. □

Άσκηση 4.7. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η $f''(x_0)$ υπάρχει. Δείξτε ότι*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον Κανόνα Hospital έχουμε (οι παραγωγίσεις γίνονται ως προς h):

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)]'}{(h^2)'} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0 - h)}{2h}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0 - h)}{2h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0) + f'(x_0) - f'(x_0 - h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 - h) - f'(x_0)}{-h}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f''(x_0) + f''(x_0)\right) = f''(x_0)\end{aligned}$$

□

Άσκηση 4.8. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν η f και η f'' είναι φραγμένες δείξτε ότι και η f' είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $M_0, M_2 > 0$ τέτοια ώστε $|f(x)| \leq M_0$ και $|f''(x)| \leq M_2$. Με χρήση του Τύπου Taylor θα δείξουμε ότι

$$|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Από τον Τύπο του Taylor έχουμε ότι για κάθε $x \neq x_0$ υπάρχει υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

Άρα για $x = x_0 + 1$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_0, x_0 + 1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0 + 1) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}$$

ισοδύναμα,

$$f'(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0) - \frac{f''(\xi)}{2}$$

Συνεπώς

$$|f'(x_0)| \leq |f(x_0 + 1)| + |f(x_0)| + \frac{|f''(\xi)|}{2} \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}.$$

$\square$

Κεφάλαιο 5

Το Ολοκλήρωμα

Άσκηση 5.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (P_n) του $[a,b]$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} (U(f,P_n) - L(f,P_n)) = 0 \tag{5.1}$$

δείξτε ότι:

(1) *Η f είναι ολοκληρώσιμη.*
(2) $\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \int_a^b f(x)\, dx$.

Απόδειξη. (1) Από την θεωρία Ολοκλήρωσης γνωρίζουμε ότι

$$L(f,P) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le U(f,P)$$

για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$. Άρα

$$L(f,P_n) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le U(f,P_n) \tag{5.2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς,

$$0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le U(f,P_n) - L(f,P_n) \tag{5.3}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τις (5.1), (5.3) και το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0 \Leftrightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη.

(2) Δείξαμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και άρα η (5.2) γράφεται

$$L(f,P_n) \le \int_a^b f(x)\, dx \le U(f,P_n) \tag{5.4}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε

$$0 \le \int_a^b f(x)\, dx - L(f,P_n) \le U(f,P_n) - L(f,P_n)$$

και άρα από την (5.1) και το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών παίρνουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b f(x)\,dx - L(f,P_n)\right) = 0$ και άρα

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ομοίως, $\lim\limits_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(U(f,P_n) - L(f,P_n)\right) + \lim\limits_{n\to\infty} L(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx.$ □

Άσκηση 5.2. *Με χρήση του τύπου*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)}{n}$$

δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) = \ln 2.$

Απόδειξη. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\frac{1}{n+i} = \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)n} = \frac{f\left(\frac{i}{n}\right)}{n}$$

όπου $f(x) = \frac{1}{1+x}$ για κάθε $x \in [0,1]$. Άρα,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)}{n}\\ &= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln 2.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 5.3. *Έστω* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει* $\xi \in (a,b)$ *τέτοιο ώστε*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

Απόδειξη. Θέτουμε $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ για κάθε $x \in [a,b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi) \tag{5.5}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b-a} = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b-a)$$

□

Άσκηση 5.4. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Με χρήση του Γενικευμένου Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού δείξτε ότι (a) $\int_a^b g(x)\ dx \neq 0$ και (2) υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε*

$$\frac{\int_a^b f(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ και $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ για κάθε $x \in [a,b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι οι συναρτήσεις $F(x)$ και $G(x)$ είναι παραγωγίσιμες με

$$F'(x) = f(x) \text{ και } G'(x) = g(x)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Αφού για όλα τα $x \in [a,b]$, $g(x) \neq 0$, από την Άσκηση 5.3, έπεται ότι και $G(b) - G(a) = \displaystyle\int_a^b g(x)\ dx \neq 0$. Εφαρμόζωντας τώρα το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\int_a^b f(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

□

Άσκηση 5.5. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Θεωρώντας την συνάρτηση*

$$H(x) = \int_a^x f(t)\ dt \cdot \int_x^b g(t)\ dt$$

δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) \int_\xi^b g(t)\ dt = g(\xi) \int_a^\xi f(t)\ dt.$$

Αποδειξη. Θέτουμε $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ και $G(x) = \displaystyle\int_x^b g(t)\ dt$ για κάθε $x \in [a,b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Για την G παρατηρούμε ότι

$$G(x) = \int_x^b g(t)\ dt = \int_a^b g(t)\ dt - \int_a^x g(t)\ dt$$

Άρα, πάλι από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, παίρνουμε

$$G'(x) = \left(\int_a^b g(t)\ dt - \int_a^x g(t)\ dt\right)' = -\left(\int_a^x g(t)\ dt\right)' = -g(x)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Η συνάρτηση $H = FG$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η παράγωγός της δίνεται από τον κανόνα παραγώγισης γινομένου,

$$\begin{aligned} H'(x) = (F(x)G(x))' &= F'(x)G(x) + F(x)G'(x) \\ &= f(x)\int_x^b g(t)\ dt - g(x)\int_a^x f(t)\ dt \end{aligned}$$

Επίπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι $H(a) = H(b) = 0$. Άρα, από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με

$$H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi)\int_\xi^b g(t)\ dt - g(\xi)\int_a^\xi f(t)\ dt = 0$$

και το συμπέρασμα έπεται. □

Ασκηση 5.6. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \neq 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (0,1)$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $\displaystyle\int_a^\xi f(x)\ dx = \lambda\int_a^b f(x)\ dx$.*

Αποδειξη. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ είναι συνεχής με $F(a) = 0$ και $F(b) = \int_a^b f(x)\ dx$. Από υπόθεση έχουμε $F(b) \neq F(a)$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, η F θα λαμβάνει κάθε τιμή μεταξύ των $F(a)$ και $F(b)$. Αν $\lambda \in [0,1]$ η τιμή

$\lambda \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \lambda F(b)$ είναι μεταξύ των $F(a)$ και $F(b)$ υπάρχει $\xi \in [a,b]$ με $F(\xi) = \lambda \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$, ισοδύναμα $\displaystyle\int_a^\xi f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$. □

Άσκηση 5.7. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν η συνάρτηση $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\, dx$, $x \in [a,b]$ είναι σταθερή δείξτε ότι $f = 0$.*

Απόδειξη. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι η F είναι σταθερή συνάρτηση και άρα $f(x) = F'(x) = 0$. □

Άσκηση 5.8. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής.*

(α) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ δείξτε ότι $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx > 0$.

(β) Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$ δείξτε ότι $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

(α) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε ότι $F'(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και συνεπώς η F είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε $F(b) > F(a)$ και άρα $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx > 0$.

(β) Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε ότι $F'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και συνεπώς η F είναι αύξουσα. Άρα το $F(a)$ και το $F(b) = \int_a^b f(x)\, dx = 0$ είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της F. Επειδή είναι και τα δύο ίσα με μηδέν, η F είναι σταθερή και ίση με μηδέν. Συνεπώς και η παράγωγος της F θα είναι μηδέν, δηλαδή $f = F' = 0$. □

Άσκηση 5.9. *Έστω $G : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με*

$$G(x) = \int_0^{\sqrt{\ln x}} e^{t^2}\, dt$$

για κάθε $x > 1$. Εξηγείστε γιατί η G είναι παραγωγίσιμη και βρείτε τον τύπο της G'.

Απάντηση : Αν $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$, $x > 0$ και $\phi(x) = \sqrt{\ln x}$, $x > 1$, τότε $G(x) = F(\phi(x))$. Συνεπώς η G είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, αφού $F'(x) = e^{x^2}$ και $\phi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \dfrac{1}{x}$. Από τον Κανόνα Αλυσίδας έχουμε

$$G'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = e^{\ln x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}.$$

Άσκηση 5.10. *Έστω $f : [a, b] \to [c, d]$ γνησίως αύξουσα συνεχής και με συνεχή παράγωγο συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_c^d f^{-1}(x)\, dx = bd - ac - \int_a^b f(x)\, dx$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = f(t)$, $t \in [a, b]$ και ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_c^d f^{-1}(x)\, dx = \int_a^b f^{-1}(f(t))f'(t)\, dt &= \int_a^b tf'(t)\, dt \\ &= [tf(t)]_a^b - \int_a^b t'f(t)\, dt \\ &= bd - ac - \int_a^b f(t)\, dt\end{aligned}$$

□

Άσκηση 5.11. *(α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αν $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα σημείο δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.*

(β) Γενικεύστε για συναρτήσεις $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ για τις οποίες $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων.

(γ) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και έχει το ίδιο ολοκλήρωμα με την f.

Απόδειξη. (α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ που είναι παντού μηδέν εκτός από ένα σημείο $\xi \in [a, b]$. Ας υποθέσουμε ότι $f(\xi) > 0$ (διαφορετικά θεωρούμε την $-f$). Για να δείξουμε τώρα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας δηλαδή θα δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$

με $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. Έστω λοιπόν $\epsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι σε κάθε υποδιάστημα του $[a,b]$, η f εχει minimum το μηδέν. Άρα $L(f,P) = 0$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$. Άρα θα πρέπει να βρούμε διαμέριση P με $U(f,P) < \epsilon$. Ας υποθέσουμε για την συνέχεια ότι $\xi \in (a,b)$ (αν $\xi = a$ ή $\xi = b$ η απόδειξη είναι παρόμοια). Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b\}$ του $[a,b]$ με τέσσερα μόνο σημεία τέτοια ώστε (α) $x_2 - x_1 < \dfrac{\epsilon}{f(\xi)}$ και (β) $x_1 < \xi < x_2$. Εύκολα βλέπουμε ότι $U(f,P) = f(\xi)\cdot(x_2 - x_1) < \epsilon$. Άρα η f είναι οιλοκληρώσιμη. Επιπλέον,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\} = \sup\{0\} = 0$$

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και $\xi_1, \ldots, \xi_n \in [a,b]$ τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$ αν και μόνο αν $x = \xi_i$ για κάποιο $i = 1, \ldots, n$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$, έστω $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που μηδενίζεται σε όλα τα $x \in [a,b]$ εκτός του x_i με $f_i(\xi_i) = f(\xi_i)$. Από το (α) ερώτημα έχουμε $\int_a^b f_i(x)\,dx = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Παρατηρούμε επίσης ότι $f = f_1 + ... + f_n$ και άρα από την γραμμικότητα του Ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (f_1+...+f_n)(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + ... + \int_a^b f_n(x)\,dx = 0$$

(γ) Θέτουμε $h = f - g$. Τότε η h είναι παντού μηδέν εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων. Άρα από το (β) η h είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b h = 0$ Επειδή $g = f - h$ από την γραμμικότητα του Ολοκληρώματος έχουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b h(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

□

Άσκηση 5.12. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$, $x \in [a,b]$. Αν $x_0 \in [a,b)$ και το $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός δείξτε ότι $F'(x_0) = \ell$.*

Απόδειξη. Αν $f(x_0) = \ell$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 και το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Αν $f(x_0) \neq \ell$, θέτουμε $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$ αν $x \neq x_0$ και $g(x_0) = \ell$. Η g είναι συνεχής στο x_0 και διαφέρει από την f μόνο στο x_0. Από την Άσκηση 5.11 παραπάνω, η g είναι ολοκληρώσιμη και επιπλέον για κάθε $x \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^x g(t)\ dt = \int_a^x f(t)\ dt$. Με άλλα λόγια αν $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\ dt$ τότε $G = F$. Επειδή η g είναι συνεχής στο x_0, η $G = F$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $F'(x_0) = G'(x_0) = g(x_0) = \ell$. $\square$

Άσκηση 5.13. *Για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ θέτουμε*

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x\ dx$$

(i) Βρείτε τα I_0 και I_1. (ii) Δείξτε ότι $I_n = \dfrac{n-1}{n}\ I_{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Απόδειξη. (1) (i) $I_0 = \int_0^{2\pi}\ dx = 2\pi$ και $I_1 = \int_0^{2\pi} \cos x\ dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0$.

(ii) Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x\ dx = \int_0^{2\pi} \cos^{n-1} x (\sin x)'\ dx \\
&= [\cos^{n-1} x \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\cos^{n-1} x)' \sin x\ dx \\
&= -(n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (\cos x)' \sin x\ dx \\
&= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x \sin^2 x\ dx \\
&= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x)\ dx \\
&= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x\ dx - (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^n x\ dx \\
&= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n
\end{aligned}$$

και άρα

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n}\ I_{n-2}$$

για κάθε $n \geq 2$. $\square$

Άσκηση 5.14. *(a)* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\ dx = \arctan x$.

(β) Αν θέσουμε $I_k = \dfrac{1}{(x^2+1)^k}\ dx$ *τότε*

$$I_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) I_k + \frac{1}{2k} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^k}.$$

Απόδειξη. (α) Άμεσο, αφού $(\arctan x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$.
(β) Παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{1}{(x^2+1)^k}\right)' = -\frac{k(x^2+1)^{k-1}2x}{(x^2+1)^{2k}} = -2k \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{k+1}} \tag{5.6}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^{k+1}}\ dx &= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{k+1}} \\
&= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{k+1}}\ dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\ dx \\
&= \int \frac{1}{(x^2+1)^{k}}\ dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\ dx \\
&= I_k - \int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{k+1}}\ dx \\
&\overset{(5.6)}{=} I_k + \frac{1}{2k} \int x \cdot \left(\frac{1}{(x^2+1)^k}\right)'\ dx \\
&= I_k + \frac{1}{2k}\left(x \cdot \frac{1}{(x^2+1)^k} - \int (x)' \cdot \frac{1}{(x^2+1)^k}\ dx\right) \\
&= I_k + \frac{1}{2k}\left(\frac{x}{(x^2+1)^k} - I_k\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2k}\right) I_k + \frac{1}{2k} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^k}.
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 5.15. *Βρείτε το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}\ dx$.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+1-1+5} \\
&= \int \frac{1}{(x+1)^2+4} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx \\
&\overset{u=\frac{x+1}{2},\ du=dx/2}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\arctan u \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.16. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$$

Λύση: Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4x+4+1}\,dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+1}\,dx.$$

Θέτουμε $u = x+2$ και άρα $x = u-2$ και $dx = du$. Οπότε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{u-2}{u^2+1}\,dy = \int \frac{u}{u^2+1}\,du - 2\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $v = u^2+1$ και άρα $dv = 2udu \Rightarrow udu = dv/2$. Συνεπώς,

$$\int \frac{u}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\,dv = \frac{1}{2}\ln v = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) = \frac{1}{2}(\ln(x+2)^2) = \ln|x+2|.$$

Για το δεύτερο έχουμε

$$\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \arctan u = \arctan(x+2).$$

Τελικά,

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \ln|x+2| + \frac{\arctan(x+2)}{2}.$$

Άσκηση 5.17. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx$.

Λύση: Κάνουμε την αντικατάσταση $u = e^x$ και $du = e^x dx = u dx$, οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx &= \int \frac{u+1}{u^2+1} \cdot \frac{1}{u}\, du \\ &= \int \frac{u+1}{u(u^2+1)}\, du \\ &= \int \frac{u}{u(u^2+1)}\, du + \int \frac{1}{u(u^2+1)}\, du \\ &= \int \frac{1}{u^2+1}\, du + \int \frac{1}{u(u^2+1)}\, du \\ &= \arctan u + \int \frac{1}{u(u^2+1)}\, du.\end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι

$$\frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}$$

έχουμε

$$\int \frac{1}{u(u^2+1)}\, du = \int \Big(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}\Big)\, du = \int \frac{1}{u}\, du - \int \frac{u}{u^2+1}\, du = \ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1).$$

Από τα παραπάνω και αφού $e^x = u$, παίρνουμε

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx = \arctan(e^x) + x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1).$$

Άσκηση 5.18. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{1}{x^3+x}\, dx$.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+x}\, dx &= \int \frac{1}{x(x^2+1)}\, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\, dx \\ &= \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\end{aligned}$$

Άσκηση 5.19. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx$$

Λύση: Θέτοντας $x = t^2$, $dx = 2tdt$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx &= 2\int \frac{\arctan t}{t(1+t^2)} t\ dt \\
&= 2\int \frac{\arctan t}{1+t^2}\ dt \\
&= 2\int \arctan t(\arctan t)'\ dt \\
&= \int \left((\arctan t)^2\right)'\ du \\
&= (\arctan t)^2 = (\arctan x)^2.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.20. *Βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα* $\int \cos^2 t\ dt$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 t\ dt &= \int \cos t \cos t\ dt \\
&= \int \cos t(\sin t)'\ dt \\
&= \cos t \sin t - \int (\cos t)' \sin t\ dt \\
&= \cos t \sin t + \int \sin^2 t\ dt \\
&= \cos t \sin t + \int \left(1 - \cos^2 t\right)\ dt \\
& \cos t \sin t + \int\ dt - \int \cos^2 t\ dt = \cos t \sin t + t - \int \cos^2 t\ dt
\end{aligned}$$

Άρα $2\int \cos^2 t\ dt = \cos t \sin t + t$ οπότε

$$\int \cos^2 t\ dt = \frac{\cos t \sin t + t}{2}$$

□

Άσκηση 5.21. *Βρείτε το ολοκλήρωμα* $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx$. *Τι απεικονίζει γεωμετρικά το ολοκλήρωμα αυτό;*

Απόδειξη. Θέτουμε $x = \sin t$, $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Τότε

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\ (\sin t)'\ dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt = \frac{\pi}{2}$$

όπως προκύπτει από την Άσκηση 5.20. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ είναι το εμβαδόν κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ που είναι το ημικύκλιο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 1 και άρα απεικονίζει το μισό του εμβαδού του κύκλου με ακτίνα 1. $\square$

Άσκηση 5.22. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{3-2x-x^2}\,dx.$

Απόδειξη. Έχουμε $3-2x-x^2 = 4-(x+1)^2 = 4\,(1-(\dfrac{x+1}{2})^2)$. Θέτουμε

$$u = \frac{x+1}{2}$$

οπότε $dx = 2du$ και έχουμε

$$\int_0^1 \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = 4\int_{1/2}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du$$

Στην συνέχεια θέτουμε

$$u = \sin t, \quad t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$$

οπότε $du = \cos t dt$ και έχουμε

$$\int_{1/2}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \frac{\cos t\sin t + t}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}.$$

(δες Άσκηση 5.20). Συνοψίζοντας,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{3-2x-x^2}\,dx &\overset{u=\frac{x+1}{2}}{=} 4\int_{1/2}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du\\ &\overset{u=\sin t}{=} 4\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt\\ &= 4\frac{\cos t\sin t + t}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}\end{aligned}$$

$\square$

Άσκηση 5.23. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\ dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\sin x\ dx = \int \frac{1}{1-\cos^2 x}\sin x\ dx &\overset{u=\cos x,\ du=-\sin x dx}{=} -\int \frac{1}{1-u^2}\ du \\ &= -\int \frac{1}{(1+u)\cdot(1-u)}\ du \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\int \frac{1}{1+u}\ du + \int \frac{1}{1-u}\ du\Big) \\ &= -\frac{1}{2}\big(\ln|1+u| - \ln|1-u|\big) = -\frac{1}{2}\ln\frac{|1+u|}{|1-u|} \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|.\end{aligned}$$

Ασκηση 5.24. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x+\sin x}\ dx.$

Λύση : Θέτουμε

$$x = 2\arctan t \Leftrightarrow t = \tan\frac{x}{2}$$

και άρα

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt$$

Από γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες έχουμε

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{και} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Με τις παραπάνω αντικαταστάσεις το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\ dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ dt = \ln 2.$$