

ΜΑΘΗΜΑ: «Κβαντική Θεωρία της Ύλης», ΔΜΠΣ-ΜΙΝΑ, ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2022-2023

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Λ. ΤΣΕΤΣΕΡΗΣ

1^η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Οι ασκήσεις δίνονται για εξάσκηση, δεν ζητείται η παράδοση των λύσεων στον διδάσκοντα.

Πρόβλημα Α.1: Σωματίδιο μάζας m βρίσκεται μέσα σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με $V(x)=0$ αν $x \in [0, a]$, $V(x)=+\infty$ αν $x \notin [0, a]$. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο

περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(x, 0) = N \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$, όπου N

πραγματική σταθερά. **(α)** Αν την στιγμή $t = 0$ γίνει μέτρηση της ενέργειας του σωματιδίου, ποιες είναι οι δυνατές τιμές της μέτρησης και οι αντίστοιχες πιθανότητες; **(β)** Βρείτε την κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$ του σωματιδίου σε χρονική στιγμή $t > 0$. **(γ)** Βρείτε την μέση τιμή της θέσης ως συνάρτηση του χρόνου. **(δ)** Έστω ότι έχουμε πολλά τέτοια πηγάδια (N_σ τον αριθμό) με ένα σωματίδιο σε κάθε πηγάδι. Αν τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και γίνει την χρονική στιγμή $t > 0$ μέτρηση της ενέργειας για ολόκληρο το σύστημα, ποιο θα είναι το αποτέλεσμα; **(ε)** Τι θα απαντούσατε αν κάποιος σας έδινε ως αρχική

κυματοσυνάρτηση την $\psi(x, 0) = N \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$ και σας έθετε τα ίδια ερωτήματα

με τα παραπάνω;

Πρόβλημα Α.2: **(α)** Δείξτε ότι ο τελεστής $U_T(a) = e^{iap/\hbar}$ (p είναι ο τελεστής της ορμής σε μία διάσταση x) είναι ο κβαντομηχανικός τελεστής χωρικής μετατόπισης κατά a , δηλαδή ότι ισχύει $U_T(a)\psi(x) = \psi(x+a)$ για τυχούσα κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$. **(β)** Ποιες είναι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του $U_T(a)$; **(γ)** Καλούμε μοναδιαίο έναν τελεστή A αν ο ερμιτιανός συζυγής του A (δηλαδή ο A^\dagger) είναι ίσος με τον αντίστροφο A^{-1} του A . Δείξτε ότι ο $U_T(a)$ είναι μοναδιαίος τελεστής. Ισχύει το ίδιο για τον τελεστή χρονικής εξέλιξης που έχουμε βρει;

Πρόβλημα Α.3: Έστω L_x, L_y, L_z οι συνιστώσες του διανυσματικού τελεστή της στροφορμής $L \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. **(α)** Βρείτε τους μεταθέτες $[L_x, L_y], [L_y, L_z], [L_z, L_x]$. **(β)** Δείξτε ότι ο τελεστής $L^2 \stackrel{\text{def}}{=} L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ μετατίθεται με όλες τις συνιστώσες L_x, L_y, L_z . Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις σχέσεις $[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}, [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$ για τις συνιστώσες των τελεστών της θέσης και της ορμής.

Πρόβλημα Α.4: Αν οι Ω και Λ είναι ερμιτιανοί τελεστές, τι μπορεί να ειπωθεί για την πιθανή ερμιτιανότητα των τελεστών: (i) $\Omega\Lambda$, (ii) $\Omega\Lambda + \Lambda\Omega$, (iii) $[\Omega, \Lambda]$, και (iv) $i[\Omega, \Lambda]$;

Πρόβλημα Α.5: Δείξτε ότι η μέση τιμή της ορμής για κάθε κυματοσυνάρτηση της μορφής $\Psi(x) = \psi(x)e^{ikx}$, όπου $\psi(x)$ είναι μια πραγματική και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη

κυματοσυνάρτηση και k ένας πραγματικός αριθμός, ισούται πάντα – δηλαδή για κάθε $\psi(x)$ – με $\hbar k$.

Πρόβλημα A.6: Έστω ότι A είναι ένας τελεστής που αντιστοιχεί σε κάποιο φυσικό μέγεθος. Έστω ακόμη ότι $f(x)$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση (συνεχής και διαφορίσιμη) σε όλο τον άξονα των x . Εάν η $f(x)$ είναι πραγματική συνάρτηση, δείξτε ότι ο τελεστής $f(A)$ είναι ερμιτιανός.

Πρόβλημα A.7: (α) Βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις και ιδιοενέργειες για το διδιάστατο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με $V(x, y) = 0$ αν $x \in [0, L]$ και $y \in [0, L]$, $V(x, y) = +\infty$ για κάθε άλλο x και y . (β) Υπάρχει εκφυλισμός των ιδιοενεργειών; Δώστε την πολλαπλότητα του εκφυλισμού για την βασική κατάσταση και για τις τρεις πρώτες διεγερμένες ενεργειακές στάθμες.

Πρόβλημα A.8: Δύο φυσικά μεγέθη Ω και Λ αναπαρίστανται από τους πίνακες

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ σε κάποια βάση. (α) Βρείτε τον μεταθέτη}$$

$[\Omega, \Lambda]$. (β) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να δώσει μία μέτρηση του Ω ; (γ) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να δώσει μία μέτρηση του Λ ; (δ) Γίνεται μία μέτρηση του Ω και αμέσως μετά γίνεται μέτρηση του Λ . Ποιες είναι οι πιθανές τιμές της δεύτερης μέτρησης και ποιες οι αντίστοιχες πιθανότητες; Εξετάστε όλα τα ενδεχόμενα.

Πρόβλημα A.9*:** Ιδιότητες συνάρτησης δέλτα του Dirac. (α) Δείξτε ότι

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}, \text{ όπου } x_i \text{ είναι τα σημεία μηδενισμού της } f(x), \text{ δηλαδή}$$

Υποθέτουμε ότι $f'(x_i) \equiv \frac{df(x_i)}{dx} \neq 0, \forall x_i$ και ότι η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση παντού.

Μπορείτε να δείξετε την σχέση πρώτα για την ειδική περίπτωση που η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο δύο λύσεις και μετά να γενικεύσετε. (β) Η συνάρτηση βήματος $\theta(x)$ ορίζεται ως

$\theta(x) = 0$ αν $x < 0$, $\theta(x) = 1$ αν $x \geq 0$. Δείξτε ότι ισχύει $\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x') dx'$, ή, ισοδύναμα, ότι η παράγωγος της $\theta(x)$ είναι η συνάρτηση δέλτα $\delta(x)$.

Πρόβλημα A.10: Στο πρόβλημα αυτό μας απασχολεί κίνηση μόνο στο xy -επίπεδο. Σε αυτήν την περίπτωση, η στροφορμή ορίζεται από την σχέση $p_\theta \stackrel{\text{def}}{=} x p_y - y p_x$.

(α) Βρείτε την έκφραση του τελεστή p_θ στο σύστημα πολικών συντεταγμένων (r, θ) .

(β) Αν $\hat{\theta}$ είναι ο τελεστής της γωνίας, βρείτε τον μεταθέτη $[\hat{\theta}, p_\theta]$ στον χώρο των γωνιών, δηλαδή για κυματοσυναρτήσεις της μορφής $\psi(\theta)$.

(γ) Βρείτε τις κατάλληλα κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις $\psi_m(\theta)$ και ιδιοτιμές του p_θ .

(δ) Δείξτε ότι ο τελεστής $e^{i\delta\theta p_z/\hbar}$ είναι ο τελεστής γωνιακής μετατόπισης (δηλαδή περιστροφής) κατά $\delta\theta$ γύρω από τον z -άξονα.