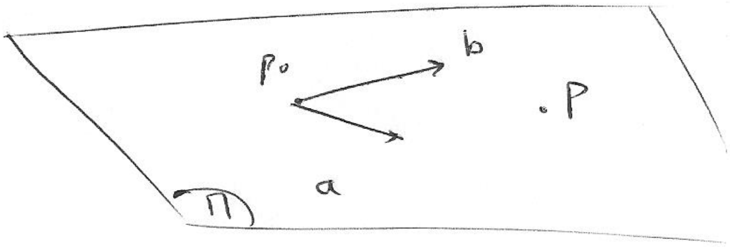
ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

I) Δίνεται σημείο του επιπέδου P_0 και δύο μη μηδενικά, μη συγγραμμικά διανύσματα, παράλληλα προς το επίπεδο Π.

Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα $Oxyz$



Τότε $P \in \Pi \Leftrightarrow$

P_0P, a, b συνεπίπεδα $\Leftrightarrow$

$\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $P_0P = \lambda a + \mu b$

Αν $\vec{OP} = \vec{r}$, $\vec{OP_0} = \vec{r_0}$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}}$$

ή

$$\boxed{[\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{a}, \vec{b}] = 0}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Αν $OP_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $OP = (x, y, z)$ και $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

τότε

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{array}\right. \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Αν αντικαταστήσουμε στη διανυσματική:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

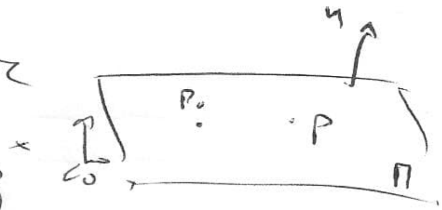
• Αν δίνονται δύο σημεία του επιπέδου P_0, P_1 διαφορετικά και ένα διάνυσμα $\vec{a} \neq \vec{0}$ παράλληλο προς το επίπεδο τ.ω. $\vec{P_0P_1} \neq \lambda \vec{a}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

τότε $\vec{b} = \vec{P_0P_1}$

• Αν δίνονται τρία σημεία P_0, P_1, P_2 μη ανευθειακά

τότε $\vec{a} = \vec{P_0P_1}$ και $\vec{b} = \vec{P_0P_2}$

II) Δίνεται σημείο P_0 του επιπέδου και ένα διάνυσμα $\vec{\eta} \perp \Pi$.



Έστω $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και $\vec{\eta} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq \vec{0}$

και τυχαίο $P(x, y, z)$

$$P \in \Pi \Leftrightarrow \vec{P_0P} \perp \vec{\eta} \Leftrightarrow \boxed{\langle \vec{r} - \vec{r_0}, \vec{\eta} \rangle = 0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle - \langle \vec{r_0}, \vec{\eta} \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - a(x_0 + b y_0 + \gamma z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0}$$

$A = \alpha$, $B = \beta$, $\Gamma = \gamma$

$\Delta = -(\alpha x_0 + b y_0 + \gamma z_0)$.

Οι προηγούμενες περιπτώσεις ανάγονται στην τελευταία θέτοντας $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

Θεώρημα

Κάθε εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \quad \text{με} \quad (A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$$

είναι η καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου με κάθετο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B, \Gamma)$.

Διερεύνηση της εξίσωσης

Αφού $(A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$ τότε τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές A, B, Γ είναι διάφορος του 0 άρα:

$\boxed{\text{I. } A \neq 0 \text{ και } B = \Gamma = 0}$

Τότε η εξίσωση γίνεται $x = x_0$ με $x_0 = -\Delta/A$ ενώ το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο Π είναι το $\vec{n}(A,0,0) = A(1,0,0)$.

Επομένως το επίπεδο Π είναι κάθετο προς τον άξονα $x'x$ στο σημείο του $(x_0, 0, 0)$.

Ομοια η $y = y_0$ ορίζει επίπεδο κάθετο προς τον yy'

" $z = z_0$ " " " zz'.

Ειδικά: $z = 0$: η εξίσωση του επιπέδου Oxy.

$y = 0$: " " Oxz

$x = 0$: " " Oyz

$\boxed{\text{II}.\ AB \neq 0 = \Gamma}$

Τότε $\vec{n} = (A, B, 0) = A\vec{i} + B\vec{j}$ και $\langle \vec{n}, \vec{k} \rangle = 0$

Άρα το Π παράλληλο προς τον άξονα $z'z$.

Αν $A = 0$ τότε Π " " στον $x'x$

Αν $B = 0$ " " " $y'y$

$\boxed{\text{III}.\ \Delta = 0}$

Η $Ax + By + \Gamma z = 0$ ορίζει επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων $(0,0,0)$.

$\boxed{\text{IV})\ AB\Gamma\Delta \neq 0}$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1 \quad \text{με} \quad a = -\Delta/A \ , \ \beta = -\Delta/B \ , \ \gamma = -\Delta/\Gamma$$

κανονική εξίσωση του επιπέδου

Εύκολη σχεδίαση από τα σημεία τομής : $A_1(a,0,0)$, $B_1(0,\beta,0)$, $\Gamma_1(0,0,\gamma)$

Άσκηση

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου π που ορίζεται από:

i) Το $P_0(1,-2,3)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο $2x+y-4z-8=0$

ii) Το $P_0(1,-3,2)$ και είναι παράλληλο προς τις ευθείες:

$$\varepsilon_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2} \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: -x+1 = y-3 = z$$

Λύση

i) Το $\Pi': 2x+y-4z-8=0 \perp \vec{n}=(2,1,-4)$

άρα το $\vec{n} \perp \Pi$.

Επομένως:

$$\langle \vec{r}-\vec{r}_0, \vec{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (x,y,z)-(1,-2,3), (2,1,-4) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x+y-4z+12=0$$

ii) $\varepsilon_1 \parallel \vec{a}_1=(2,3,2)$

$\varepsilon_2 \parallel \vec{a}_2=(-1,1,1)$

Τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \parallel \Pi$ άρα

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-4y+5z+23=0$$

Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

$$\Pi_1: A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \quad \perp \vec{n}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1)$$

$$\Pi_2: A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \quad \perp \vec{n}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2)$$

Τότε:

- $$\boxed{\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \lambda \in \mathbb{R}}$$

Άρα αν $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \lambda \in \mathbb{R}$ τα Π_1, Π_2 συμπίπτουν.

και αν $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \neq \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ τα Π_1, Π_2 παράλληλα

- $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ μη συγγραμμικά

τότε δύο τουλάχιστον από τους λόγους $\frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$

διαφορετικοί με ταξύ τους

Τότε τα επίπεδα Π_1, Π_2 τέμνονται κατά

μια ευθεία γραμμή

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι αναλυτικές και οι παραμετρικές εξισώσεις της τομής των επιπέδων:

$$\Pi_1 : 6x + y - z + 2 = 0$$

$$\Pi_2 : 2x - y + 3z - 14 = 0$$

Λύση

α' τρόπος: Τα $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ μη συγγραμμικά άρα

$$\begin{cases} 6x + y - z + 2 = 0 \\ 2x - y + 3z - 14 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 8x = -2z + 12 \\ 4y = 10z - 14 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{8x - 12}{-2} = \frac{4y + 44}{10} = z \Longleftrightarrow \frac{x - 3/2}{1} = \frac{y + 11}{-10} = \frac{z - 0}{-4}$$

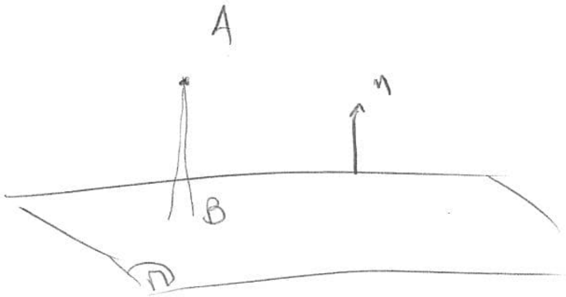
άρα περνά από το $A\left(\frac{3}{2}, -11, 0\right)$ και $\parallel \vec{a} = (1, -10, -4)$

Παραμετρικές
$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + t \\ y = -11 - 10t \\ z = -4t \end{cases}$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί η ορθή προβολή του $A(2,-3,6)$ στο επίπεδο $\Pi: -3x+2y-z-10=0$

Λύση



Έστω B η ορθή προβολή του A στο Π.

Τότε ορίζεται ευθεία από τα A, B (ε) η οποία έχει παράλληλο διάνυσμα το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου Π $\vec{n}=(-3,2,-1)$

Άρα η ευθεία ε:

$$\vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{n} \Leftrightarrow \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(x,y,z)=(2,-3,6)+t(-3,2,-1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=2-3t \\ y=-3+2t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=6-t \end{cases}$$

Για να προσδιοριστεί το B θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων της ευθείας και του επιπέδου άρα

$$-3(2-3t)+2(-3+2t)-(6-t)-10=0$$

$$\Leftrightarrow -6+9t-6+4t-6+t-10=0$$

$$\Leftrightarrow 14t-28=0 \Leftrightarrow t=2$$

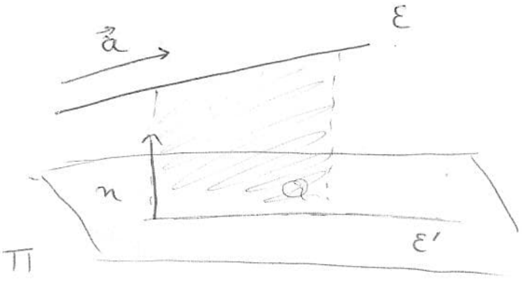
Άρα $(x,y,z)=(-4,1,4)$.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η προβολή της ευθείας $\varepsilon: x-1 = \frac{y}{2} = z-3$ πάνω στο επίπεδο $\Pi: x-2y+3z-3=0$

Λύση

Αν Q το επίπεδο που ορίζεται από τη δεδομένη ευθεία ε και την προβολή της ε'.



Τότε η $\varepsilon' = \Pi \cap Q$

Αν $\vec{u} \perp Q$ ($\vec{u}$ το κάθετο διάν-) τότε $\vec{u} \perp \vec{a}$ και $\vec{u} \perp \vec{\eta}$

Άρα $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{\eta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8i - 2j - 4k$

και $\vec{r_0} = \vec{OP_0} = (1, 0, 3)$ (η ε διέρχεται από το P_0)

Τότε η εξίσωση του επιπέδου θα είναι:

$$\langle \vec{r} - \vec{r_0}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (x-1, y, z-3), (8, -2, -4) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - y + 2z + 2 = 0$$

Άρα

$$\varepsilon' : \begin{cases} 4x - y + 2z + 2 = 0 \\ x - 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z - 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + 1 = \frac{y+2}{2} = z$$