Ορισμός

Έστω V διαν. χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.

Έστω η συνάρτηση $<,>: V\times V \to \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες
$(a,b) \mapsto <a,b>$

ιδιότητες:

(i) $<a,b> = <b,a>$

(ii) $<a+b,c> = <a,c> + <b,c>$

(iii) $<\lambda a, b> = \lambda <a,b>$ για $a,b,c \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(iv) $<a,a> > 0$ αν $a \neq 0$ και $=0$ ανν $a=0$

Η συνάρτηση αυτή είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο V

και το ζεύγος $(V,<,>)$ λέγεται χώρος με εσωτερικό γινόμενο

Από τις παραπάνω ιδιότητες έπεται ότι:

(v) $<a,b+c> = <a,b> + <a,c>$

(vi) $<a,\lambda b> = \lambda <a,b>$ για $a,b,c \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Πράγματι έχουμε:

- $<a,b+c> \overset{(i)}{=} <b+c,a> \overset{(ii)}{=} <b,a> + <c,a> \overset{(i)}{=} <a,b> + <a,c>$

- $<a,\lambda b> \overset{(i)}{=} <\lambda b, a> \overset{(iii)}{=} \lambda <b,a> \overset{(i)}{=} \lambda <a,b>$

Ορισμός

Έστω $(V,<,>)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο

Τότε η συνάρτηση $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ με $\|a\| = <a,a>^{1/2}$
$a \mapsto \|a\|$

καλείται μέτρο (νόρμα) στο V

Παραδείγματα

1) Στον $\mathbb{R}^2$ το κανονικό εσωτερικό

$$\langle \vec{\alpha}_1, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad \vec{\alpha} = (\alpha_1, b_2), \quad \vec{b} = (b_1, b_2).$$

2) Στον $\mathbb{R}^2$ η απεικόνιση:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 - \alpha_2 b_1 - a_1 b_2 + 2 a_2 b_2$$

Πράγματι,

Για $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = a_1^2 - a_2 a_1 - a_1 a_2 + 2a_2^2$

$$= a_1^2 - 2a_2\alpha_1 + \alpha_2^2 + \alpha_2^2$$

$$= (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \alpha_2^2 > 0$$

κτλ

3) Έστω $\Delta \in M_2(\mathbb{R})$ με $\Delta = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$ $\mu, \nu > 0$

Η $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\langle a, b \rangle = (a_1, a_2)\, \Delta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

είναι εσωτερικό γινόμενο

Πράγματι,

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \mu . a_1 \beta_1 + \nu a_2 b_2$

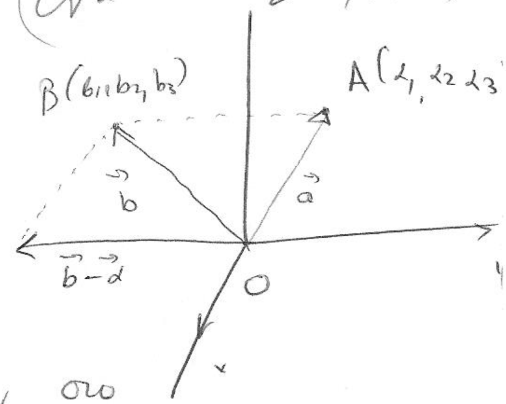
Τότε ικανοποιούνται όλες οι ιδιότητες

(ή $\langle a, b \rangle = (\alpha_1, a_2)\, A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$ $x > 0$ και $y > 0$ $xy - z^2 > 0$)

Το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$ $\vec{a}(a_1, a_2, b_3)$, $b=(b_1, b_2, b_3)$

(Ένα μεγαλύτερο σχήμα)



Ορίζεται $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ είναι ισοδύναμο με το εξής:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Πράγματι,
Εφαρμόζοντας το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\cos(a,b)$$

$$\Longleftrightarrow (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2\langle a \cdot b \rangle$$

$$\Longleftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Είναι πράγματι εσωτερικό γινόμενο

Π.χ. συμμετρία

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$$

$$= \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

και

Πρόταση

Για κάθε $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

i) $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$ (Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)

ii) $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2)$ (Νόμος παρ/μου)

iii) $\|\vec{a} \pm \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (τριγωνική ανισότητα)

Απόδειξη

i) Προκύπτει άμεσα αφού είναι $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ και

$$|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})| \leq 1$$

ii) $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$

$$= \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2$$

και $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2$

άρα προσθέτοντας τις

iii) $\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|a\|^2 \pm 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2$

$$\leq \|a\|^2 + 2|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| + \|\vec{b}\|^2$$

$$\overset{C-S}{\leq} \|a\|^2 + 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|$$

$$\leq (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$$

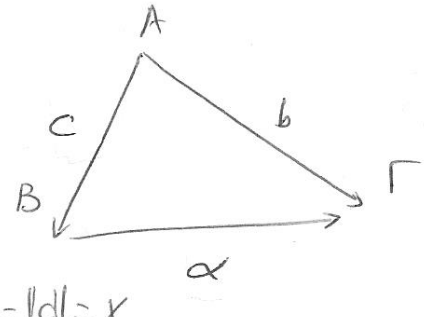
Αποτετραγωνίζοντας τις

Εφαρμογές

1) Σε κάθε τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ $B\Gamma=\alpha$, $\Gamma A=\beta$, $AB=\gamma$ ν.δ.ο

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cos A \qquad \text{(Νόμος συνημιτόνων)}$$

Απόδειξη



Θεωρούμε τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ και ορίζουμε τα διανύσματα:

$\vec{\alpha}=\vec{B\Gamma}$, $\vec{A\Gamma}=\vec{b}$, $\vec{AB}=\vec{c}$

Τότε $|B\Gamma|=\|\alpha\|=a$, $|A\Gamma|=\|b\|=\beta$, $|AB|=\|c\|=\gamma$

Ισχύει :

$$\vec{\alpha}+\vec{c}=\vec{b} \Rightarrow \vec{\alpha}=\vec{b}-\vec{c}$$

Οπότε έχουμε: $\|\vec{\alpha}\|^2=\|(\vec{b}-\vec{c})\|^2=\|\vec{b}\|^2+\|\vec{c}\|^2-2\langle\vec{b},\vec{c}\rangle$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2=\|\vec{b}\|^2+\|\vec{c}\|^2-2\|\vec{c}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\hat{\vec{b},\vec{c}})$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cos A$$

Αν $\hat{A}=90 \Rightarrow \alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ Πυθαγόρειο

2) Δύο διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ είναι κάθετα ανν το εσωτερικό γινόμενό τους είναι μηδέν Δδ

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \langle\vec{a},\vec{b}\rangle=0$$

Απόδειξη

(⟹) Αν $\vec{a} \perp \vec{b}$ τότε $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{2}$

άρα από τον ισοδύναμο ορισμό $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

(⟸) Αν $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 0$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$

τότε $\cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 0 \Rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{2}$

άρα $\vec{a} \perp \vec{b}$

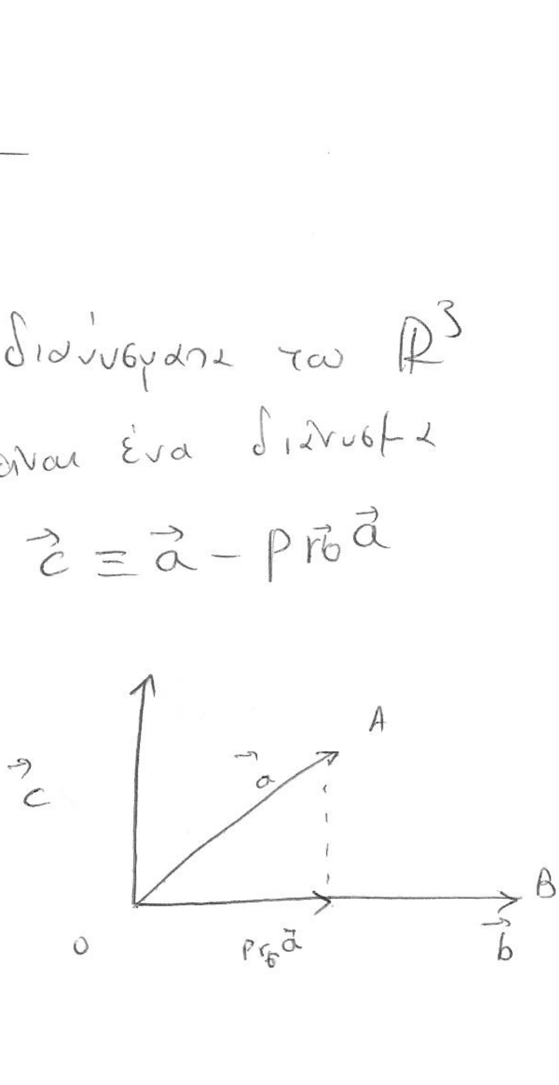
Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$ τότε τα $\vec{a}, \vec{b}$ κάθετα διότι στη διεύθυνση του μηδενικού μπορείτε να θεωρήσετε οποιαδήποτε διεύθυνση

Προβολή του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{b}$

$pr_{\vec{b}} \vec{a}$

Έστω $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

Η προβολή του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{b}$ είναι ένα διάνυσμα συγγραμμικό με το $\vec{b}$ τ.ω. το $\vec{c} \equiv \vec{a} - pr_{\vec{b}} \vec{a}$ να είναι κάθετο στο $\vec{b}$



Άρα $pr_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda \vec{b}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$

και $\vec{c} \perp \vec{b}$

Άρα $0 = \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a} - pr_{\vec{b}} \vec{a} \rangle$

$= \langle \vec{a} - \lambda \vec{b}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \lambda \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$

Άρα $\lambda = \dfrac{\langle \vec a, \vec b\rangle}{\langle \vec b, \vec b\rangle}$

Επομένως $\quad pr_{\vec b}\vec a = \dfrac{\langle \vec a,\vec b\rangle}{\langle \vec b,\vec b\rangle}\,\vec b$

Ασκήσεις

1) Έστω $\vec a,\vec b$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$.
Ν.δ.ο τα $\vec a+\vec b$ και $\vec a-\vec b$ είναι κάθετα
ανν $\|\vec a\|=\|\vec b\|$.

Απόδειξη

Έχουμε ότι $(\vec a+\vec b)\perp(\vec a-\vec b) \Leftrightarrow$

$\langle \vec a+\vec b, \vec a-\vec b\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle\vec a,\vec a\rangle - \langle \vec a,\vec b\rangle + \langle\vec b,\vec a\rangle - \langle \vec b,\vec b\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \|\vec a\|^2 - \|\vec b\|^2 = 0$

$\Leftrightarrow \|\vec a\|^2 = \|\vec b\|^2 \Leftrightarrow \|\vec a\| = \|\vec b\|$

2) Να αποδειχθεί η ανισότητα C-S χωρίς τη
χρήση του ορισμού $\langle \vec a,\vec b\rangle = \|\vec a\|\|\vec b\|\cos(\widehat{\vec a,\vec b})$

Αποδ

Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$0 \le \|\lambda\vec a+\vec b\|^2 = \langle\lambda\vec a+\vec b, \lambda\vec a+\vec b\rangle$

$= \lambda^2\langle\vec a,\vec a\rangle + 2\lambda\langle\vec a,\vec b\rangle + \langle\vec b,\vec b\rangle = \|\vec a\|^2\lambda^2 + 2\langle\vec a,\vec b\rangle\lambda + \|\vec b\|^2$

Δηλ. το δευτεροβάθμιο, ως προς λ, τριώνυμο

$\|\vec{a}\|^2 \lambda^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \lambda + \|\vec{b}\|^2$ παίρνει πάντα

μη αρνητικές τιμές, άρα η διακρίνουσα

είναι μη αρνητική:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$4\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 - 4\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$$

3) Να βρεθούν οι προβολές του $\vec{a} = (5, -1, 3)$

πάνω στα $\vec{b} = (-1, 4, 1)$ και $\vec{c} = (1, -1, -1)$

$$pr_{\vec{b}}\, \vec{a} = \lambda_1 \vec{b} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}\, \vec{b} = \dots = -1/3$$

$$pr_{\vec{c}}\, \vec{a} = \dots = 1$$