Πόρισμα

Τρία διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ είναι συνεπίπεδα αν και μόνο αν το μικτό τους γινόμενο είναι μηδέν.

Απόδειξη

Πράγματι,

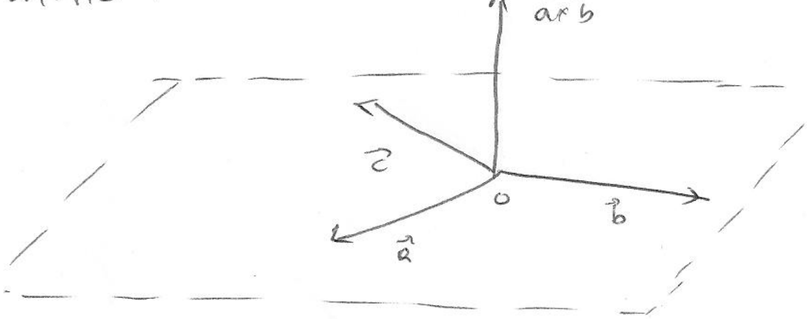
αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ τρία συνεπίπεδα του $\mathbb{R}^3$ τότε το διάνυσμα $\vec{a} \times \vec{b}$ ως κάθετο στο επίπεδο των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι κάθετο και στο διάνυσμα $\vec{c}$, συνεπώς το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}$ είναι μηδέν δηλ. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$

Αντίστροφα, αν $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$

Επίσης έχουμε ότι: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ και $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$.

Άρα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ συνεπίπεδα



Ασκήσεις

1) Να αποδειχθεί η ταυτότητα:

$$\langle a\times b,\ c\times d\rangle = \langle\langle a,c\rangle, \langle b,d\rangle\rangle - \langle\langle a,d\rangle, \langle b,c\rangle\rangle$$

$$= \begin{vmatrix} \langle a,c\rangle & \langle a,d\rangle \\ \langle b,c\rangle & \langle b,d\rangle \end{vmatrix}$$

Λύση

Θέτοντας $w = c\times d$ έχουμε:

$$\langle a\times b,\ c\times d\rangle = \langle a\times b,\ w\rangle = \langle a,\ b\times w\rangle$$

$$= \langle a\ ,\ b\times(c\times d)\rangle \overset{(B)\ \text{θεώρημα}}{=} \langle a,\ \langle b,d\rangle c - \langle b,c\rangle d\rangle$$

$$= \langle\langle a,c\rangle, \langle b,d\rangle\rangle - \langle\langle a,d\rangle, \langle b,c\rangle\rangle$$

$$= \begin{vmatrix} \langle a,c\rangle & \langle a,d\rangle \\ \langle b,c\rangle & \langle b,d\rangle \end{vmatrix}$$

2) Αν $\vec a, \vec b, \vec c, \vec d$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ τότε:

$$[\vec a\times\vec b,\ \vec b\times\vec c,\ \vec c\times\vec a] = [\vec a, \vec b, \vec c]^2$$

Λύση

$$[\vec a\times\vec b,\ \vec b\times\vec c,\ \vec c\times\vec a] \overset{\text{ορισμός}}{=} \langle\vec a\times\vec b\ ,\ (\vec b\times\vec c)\times(\vec c\times\vec a)\rangle$$

$$= \langle\vec a\times\vec b,\ \underset{\|}{[\vec b\,\vec c\,\vec a]}\,\vec c - \underset{0}{[\vec b\,\cancel{\vec c}\,\vec c]}\,\vec a\rangle$$

$$= \langle\vec a\times\vec b\ ,\ [\vec a\,\vec b\,\vec c]\,\vec c\rangle = [\vec a\,\vec b\,\vec c]\,\langle\vec a\times\vec b\ ,\vec c\rangle$$

$$= [\vec a\,\vec b\,\vec c]^2$$

3) Έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ τρία διανύσματα στο χώρο $\mathbb{R}^3$ και

$$\vec{u} = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{b}\times\vec{c}) + (\vec{c}\times\vec{a})$$

Να δειχθεί ότι:

$$\langle \vec{a}, \vec{u}\rangle = \langle \vec{b}, \vec{u}\rangle = \langle \vec{c}, \vec{u}\rangle$$

Λύση

$$\langle \vec{a}, \vec{u}\rangle - \langle \vec{b}, \vec{u}\rangle = \langle \vec{a}, (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{b}\times\vec{c}) + (\vec{c}\times\vec{a})\rangle - \langle \vec{b}, (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{b}\times\vec{c}) + (\vec{c}\times\vec{a})\rangle$$

$$= \underset{0}{\cancel{\langle \vec{a}, \vec{a}\times\vec{b}\rangle}} + \langle \vec{a}, \vec{b}\times\vec{c}\rangle + \underset{0}{\cancel{\langle \vec{a}, \vec{c}\times\vec{a}\rangle}} - \underset{0}{\cancel{\langle \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\rangle}} - \underset{0}{\cancel{\langle \vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}\rangle}} - \langle \vec{b}, \vec{c}\times\vec{a}\rangle$$

$$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$$

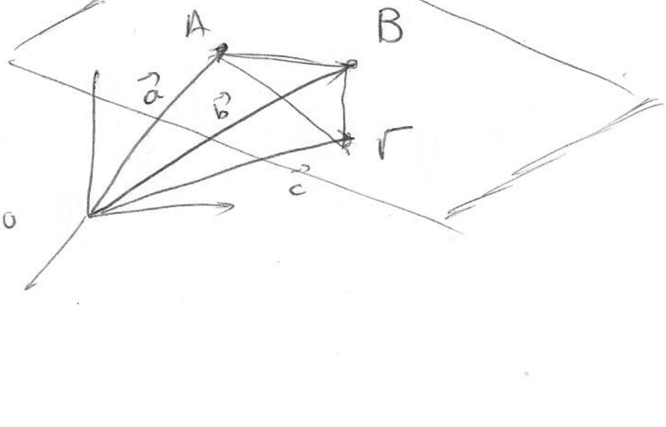
Ομοίως και η $\langle \vec{b}, \vec{u}\rangle - \langle \vec{c}, \vec{u}\rangle = 0$

Σχόλιο

Από τις $\langle \vec{a}, \vec{u}\rangle = \langle \vec{b}, \vec{u}\rangle = \langle \vec{c}, \vec{u}\rangle$ παίρνουμε

$\langle \vec{a}-\vec{b}, \vec{u}\rangle = 0$ και $\langle \vec{c}-\vec{a}, \vec{u}\rangle = 0$, δηλ.

Το $\vec{u}$ είναι κάθετο στα διανύσματα $\vec{AB} = \vec{b}-\vec{a}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{c}-\vec{a}$, δηλ. είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Γ



4) Έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. (3)

Αν $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \neq 0$ και $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 0$ να προσδιοριστεί ένα διάνυσμα $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $\vec{a} \times \vec{u} = \vec{c}$ και $\langle \vec{b}, \vec{u} \rangle = \lambda$. Να γίνει η επαλήθευση

<u>Λύση</u>

Πολ/ντας εξωτερικά την $\vec{a} \times \vec{u} = \vec{c}$ με το $\vec{b}$ παίρνουμε

$$\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{u}) = \vec{b} \times \vec{c} \iff$$

$$\langle \vec{b}, \vec{u} \rangle \vec{a} - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \vec{u} = \vec{b} \times \vec{c} \iff$$

$$\lambda \vec{a} - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \vec{u} = \vec{b} \times \vec{c} \iff$$

$$\vec{u} = \frac{\lambda \vec{a} - (\vec{b} \times \vec{c})}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}$$

Το διάνυσμα αυτό είναι το ζητούμενο

Πράγματι,

$$\vec{a} \times \vec{u} = \vec{a} \times \frac{\lambda \vec{a} - (\vec{b} \times \vec{c})}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} = \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} [\vec{a} \times (\lambda \vec{a} - (\vec{b} \times \vec{c}))]$$

$$= \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} [\lambda (\vec{a} \times \vec{a}) - \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]$$

$$= \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} [0 - \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}]$$

$$= \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c} = \vec{c}$$

και $$\langle \vec{b}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{b}, \frac{\lambda \vec{a} - (\vec{b} \times \vec{c})}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \rangle = \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \langle \vec{b}, \lambda \vec{a} - (\vec{b} \times \vec{c}) \rangle$$

$$= \frac{1}{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} [\lambda \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle}_{0}] = \lambda$$

5) Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ και

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ τότε

i) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]=0$

ii) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

Αποδ

i) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=\langle\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}\rangle=\langle\vec{a}\times\vec{b}, -\vec{a}-\vec{b}\rangle$

$=-\langle\vec{a}\times\vec{b}, \vec{a}\rangle-\langle\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\rangle=0$

ii) $(\vec{a}\times\vec{b})-(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{c}(\vec{c}\times\vec{b})$

$=(\vec{a}+\vec{c})\times\vec{b}=(-\vec{b})\times\vec{b}=0$

Άρα $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}$

6) Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u}, \vec{v}$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

i) $[\vec{a}+\vec{b}, \vec{u}, \vec{v}]=[\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}]+[\vec{b}, \vec{u}, \vec{v}]$

ii) $[\vec{u}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{v}]=[\vec{u}, \vec{b}, \vec{v}]+[\vec{u}, \vec{c}, \vec{v}]$

iii) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{c}+\vec{a}]=[\vec{u}, \vec{v}, \vec{c}]+[\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}]$

iv) $[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}]=2[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$

$\rightarrow$

5

Από ιδιότητα ορίζουσας ή

π.χ. το (i) $[\vec{a}+\vec{b}, \vec{u}, \vec{v}] = \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{u}\times\vec{v} \rangle$

$= \langle \vec{a}, \vec{u}\times\vec{v} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{u}\times\vec{v} \rangle = [\vec{a}\ \vec{u}\ \vec{v}] + [\vec{b}\ \vec{u}\ \vec{v}]$

iv) $[a+b, b+c, c+\alpha] = [a, b+c, c+\alpha] + [b, b+c, c+\alpha]$

$= \left([a, b, c+a] + [a, c, c+\alpha]\right) + \left([b, b, c+\alpha] + [b, c, c+\alpha]\right)$

$= [a, b, c] + \underbrace{\cancel{[a, b, a]}}_{0} + \underbrace{\cancel{[a, c, c]}}_{0} + \underbrace{\cancel{[a, c, a]}}_{0} +$

$\underbrace{\cancel{[b, b, c]}}_{0} + \underbrace{\cancel{[b, b, a]}}_{0} + \underbrace{\cancel{[b, c, c]}}_{0} + [b, c, \alpha]$

$= 2[a, b, c]$

7) Αν $\vec{a}, \vec{b}$ είναι μη συγγραμμικά μοναδιαία διανύσματα και $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$ να βρεθεί το διάνυσμα που είναι λύση της εξίσωσης

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \vec{b} + 4\vec{a} = 2\vec{u}$$

<u>Λύση</u>

Παίρνοντας "εσωτερικά" με το $\vec{a}$ έχουμε:

$2\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 4\langle \vec{a}, \vec{\alpha} \rangle + \langle \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \vec{b}, \vec{a} \rangle$

$\Rightarrow 2\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 4\|\vec{a}\|^2 + \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle . \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$

$\Rightarrow 2\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 4 + \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$ $\longrightarrow$

Άρα

$$2\langle \vec{a},\vec{u}\rangle = 4 + \frac{\langle \vec{a},\vec{u}\rangle}{2} \Longrightarrow$$

$$\frac{3}{2}\langle \vec{a},\vec{u}\rangle = 4 \Longrightarrow \langle \vec{a},\vec{u}\rangle = \frac{4.2}{3}$$

Επομένως

$$\vec{u} = 2\vec{a} + \frac{\langle \vec{a},\vec{u}\rangle}{2}\vec{b}$$

$$= 2\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$$