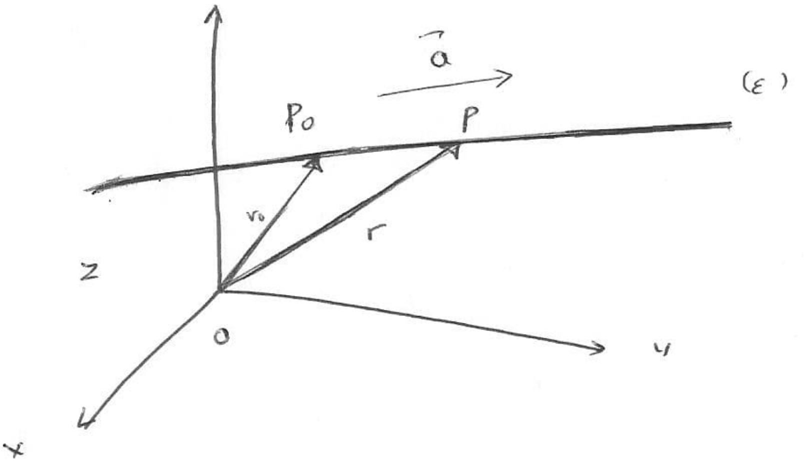
Η ευθεία στο χώρο

1η περίπτωση

Έστω $Oxyz$ ορθοκανονικό σύστημα και υποθέτουμε ότι η ευθεία ε περνά από το σημείο P_0 με διάνυσμα θέσης $OP_0 = r_0$ και είναι παράλληλη προς το δεδομένο διάνυσμα $\vec{a} = (a, \beta, \gamma) \neq \vec{0}$



Έστω P τυχαίο σημείο της ευθείας ε με διάνυσμα θέσης $\vec{OP} = \vec{r}$ τότε έχουμε:

$$P \in \varepsilon \Leftrightarrow \vec{P_0P} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow$$

$$\vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{a} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\vec{r} = r_0 + t\vec{a} \quad t \in \mathbb{R}}$$

ή $\boxed{(\vec{r} - \vec{r_0}) \times \vec{a} = 0}$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ε.

Θέτοντας $\vec{OP_0} = \vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ και $\vec{OP} = \vec{r}(x, y, z)$:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, \gamma)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}} \quad t \in \mathbb{R}$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ε.

Απαλείφοντας το t έχουμε:

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ Ή ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma} \quad \text{αν } \alpha\beta\gamma\neq 0}$$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}, \quad z-z_0=0 \quad \text{αν } \alpha\beta\neq 0 \ \gamma=0}$$

2η "περίπτωση"

Αν δίνονται δύο σημεία $P_1(x_1,y_1,z_1)$ και $P_2(x_2,y_2,z_2)$ της ε διαφορετικά μεταξύ τους τότε

για $\vec{a}$ θεωρούμε το $\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{r_2}-\vec{r_1}\neq\vec{0}$

και για $P_0\equiv P_1$ οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση και έχουμε:

$\vec{r}=\vec{r_1}+t(\vec{r_2}-\vec{r_1})$ και $(\vec{r}-\vec{r_1})\times(\vec{r_2}-\vec{r_1})=0$ διανυσμ.

$$\begin{aligned} x&=x_1+t(x_2-x_1)\\ y&=y_1+t(y_2-y_1)\\ z&=z_1+t(z_2-z_1)\end{aligned}$$ παραμετρ.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$ αναλυτικές με $(x_2-x_1)(y_2-y_1)(z_2-z_1)\neq 0$

Παράδειγμα

Δίνονται οι ευθείες:

$\varepsilon_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}$ $t \in \mathbb{R}$

$\varepsilon_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + s\vec{b}$, $s \in \mathbb{R}$ $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

Να αποδείξετε ότι:

(i) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ συνεπίπεδες $\Longleftrightarrow [\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}, \vec{b}] = 0$

(ii) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ασύμβατες $\Longleftrightarrow [\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}, \vec{b}] \neq 0$

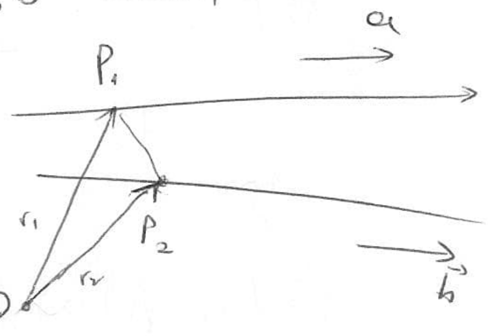
Απόδειξη

(i) Έχουμε:

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ συνεπίπεδες $\Longleftrightarrow P_2P_1, a, b$ συνεπίπεδα

$\Longleftrightarrow [P_2P_1, a, b] = 0$

$\Longleftrightarrow [r_1 - r_2, a, b] = 0$



ii) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ασύμβατες $\Longleftrightarrow$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ μη συνεπίπεδες $\Longleftrightarrow$

P_2P_1, a, b μη συνεπίπεδα $\Longleftrightarrow$

$[P_2P_1, a, b] = [r_1 - r_2, a, b] \neq 0$.

Παράδειγμα

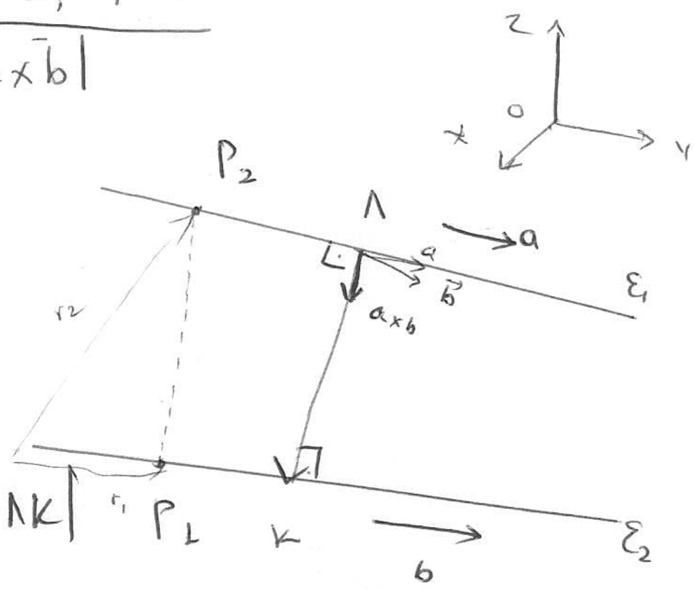
Αν οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{με} \quad \vec{a}, \vec{b} \neq 0$$
$$\varepsilon_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + s\vec{b} \quad s \in \mathbb{R}$$

είναι ασύμβατες να αποδείξετε ότι η απόσταση τους δηλ. το μήκος του κοινού κάθετου τμήματος είναι:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}, \vec{b}]|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

Λύση



Έστω ΚΛ το κοινό κάθετο τμήμα των δύο ευθειών. Τότε $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = |\Lambda K|$

Τότε το $\vec{a} \times \vec{b} (\neq \vec{0})$ θα είναι παράλληλο με το $\vec{K\Lambda}$

Έχουμε:

$$P_2P_1 \cdot (a \times b) = (a \times b) \cdot P_{r_{(a \times b)}} P_2P_1$$
$$\Leftrightarrow (r_1 - r_2)(a \times b) = \pm |a \times b| |\Lambda K|$$
$$\Leftrightarrow d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|[r_1 - r_2, a, b]|}{|a \times b|}$$

Παράδειγμα

Έστω οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : x-1 = \frac{y-9}{-2} = z-5$$

$$\varepsilon_2 : \frac{x-6}{7} = \frac{y+7}{-6} = z$$

i) Να δειχθεί ότι οι ευθείες είναι ασύμβατες

ii) Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής κάθετης αυτών

Λύση

i) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ασύμβατες $\Leftrightarrow (r_1 - r_2, a, b) \neq 0$

$\vec{r_1} = (1, 9, 5)$ $\qquad \vec{a} = (1, -2, 1)$

$\vec{r_2} = (6, -7, 0)$ $\qquad \vec{b} = (7, -6, 1)$

Άρα $r_1 - r_2 = (-5, 16, 5)$

$$[r_1 - r_2, a, b] = \begin{vmatrix} -5 & 16 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 116 \neq 0.$$

Για το ii) θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο αλλά αυτός δε μας δίνει και τα ίχνη της καθέτου άρα θα κάνουμε μια διαδικασία που αναδεικνύει ταυτόχρονα και την ύπαρξη του κοινού κάθετου ευθείας

iii) iii)a Έστω A τυχαίο σημείο της (ε_1) τότε:

$$A = (1+t,\ 9-2t,\ 5+t) \quad t \in \mathbb{R}$$

και B τυχαίο της (ε_2) με:

$$B = (6+7s,\ -7-6s,\ s) \quad s \in \mathbb{R}$$

Τότε: $\vec{AB} = (5-t+7s,\ 16+2t-6s,\ -5-t+s)$

Το AB θα είναι το κοινό κάθετο των

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \iff$

$$\begin{cases} \langle \vec{AB}, \vec{a} \rangle = 0 \\ \langle \vec{AB}, \vec{b} \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3t - 10s - 16 = 0 \\ 10t - 43s - 63 = 0 \end{cases}$$

$$\iff t = 2,\ s = -1$$

Άρα τα ίχνη της κοινής κάθετης θα είναι $A = (3, 5, 7)$ και $B(-1, -1, -1)$

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = |AB| = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1-5)^2 + (-1-7)^2} = 2\sqrt{29}$$

και η εξίσωση της ευθείας του κοινού κάθετου τμήματος:

$$(\vec{r} - \vec{r_A}) \times \vec{u} = \vec{0} \qquad \vec{u} = \vec{AB} = (-4, -6, -8), \quad \vec{r_A} = (3, 5, 7)$$

Δηλ. $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-5}{6} = \dfrac{z-7}{8}$