Άσκηση 1

Δίνονται: (Π): $x+y+z=1$

(ε): $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z-1$

i) Να βρεθεί το σημείο τομής A του (Π) με την (ε)

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που βρίσκεται στο (Π), είναι κάθετη στην (ε) και διέρχεται από το A.

Λύση

i) (ε): $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t+1 \\ z = t+1 \end{cases}$ και (Π): $x+y+z=1$

$\xrightarrow{\text{τομή}} 6t+3=1 \Rightarrow t = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

Άρα $A\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$.

ii) Έστω (δ) η ζητούμενη ευθεία:

(δ): $\frac{x-x_0}{\kappa} = \frac{y-y_0}{\lambda} = \frac{z-z_0}{\mu}$

$(\kappa,\lambda,\mu) \parallel (\delta)$

$(x_0,y_0,z_0) \in (\delta)$

Άρα θα θεωρήσουμε $(x_0,y_0,z_0) = (1/3, 0, 2/3)$

Αφού $(\delta) \in \Pi$ τότε $(\delta) \perp (1,1,1) \Rightarrow (\kappa,\lambda,\mu) \perp (1,1,1)$

$(\delta) \perp (\varepsilon)$ τότε $(\delta) \perp (2,3,1) \Rightarrow (\kappa,\lambda,\mu) \perp (2,3,1)$

Θεωρούμε $(\kappa,\lambda,\mu) = (1,1,1) \times (2,3,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2,1,1)$

Άρα $\frac{x-1/3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2/3}{1}$

2

Άσκηση 2

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το $A(0,1,-1)$ και περιέχει την ευθεία:

$$(\varepsilon)\quad \frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = z+2$$

Λύση

(Προφανώς $A \notin (\varepsilon)$)

Για $z=0$: $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = 0+2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 7 \end{cases}$$

Άρα ένα σημείο της (ε): $\Gamma(-7,7,0)$

Ένα τρίτο: $B:(-1,3,-2)$. Άρα $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-1,2,-1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{A\Gamma} = (-7,6,1)$

Άρα
$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 8x + 8(y-1) + 8(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x+y+z=0}$$

Άσκηση 3

Δίνονται:

$A_1(-1,1,0)$, $A_2(1,0,1)$

και $\vec{w}_1=(0,0,1)$, $\vec{w}_2=(0,1,0)$

(α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών ε_i που περιέχει το A_i και είναι παράλληλη στο w_i για $i=1,2$.

β) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει επίπεδο (Π_1) που περιέχει την ε_1 και είναι κάθετο στο $w_1 \times w_2$.
Να βρεθεί η εξίσωση του (Π_1).

(γ) Να ελεγχθεί αν το επίπεδο (Π_1) έχει κοινό σημείο με την ευθεία (ε_2).

Λύση

(α) $(\varepsilon_1): \begin{cases} x=-1+0t=-1 \\ y=1+0\cdot t=1 \\ z=0+1\cdot t=t \end{cases}$ με $A_1 \in (\varepsilon_1)$ και $w_1 \parallel (\varepsilon_1)$

$(\varepsilon_2): \begin{cases} x=1+0\cdot t=1 \\ y=0+1\cdot t=t \\ z=1+0\cdot t=1 \end{cases}$

β) Είναι $(\varepsilon_1) \parallel w_1$ και $w_1 \perp w_1 \times w_2$ $\Rightarrow (\varepsilon_1) \perp w_1 \times w_2$

$\Rightarrow$ υπάρχει επίπεδο που περιέχει την (ε_1) και $\perp w_1 \times w_2$

$$\omega_1 \times \omega_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,0,0)$$

Άρα το $(-1,0,0) \perp (\Pi_1)$

Αν $(\Pi_1): ax + \beta y + \gamma z + \delta = 0$

$\Rightarrow -x + \delta = 0$

Το (Π_1) περιέχει την (ε_1) άρα και το σημείο $(-1,1,0)$ άρα:

$\delta = -1$

Επομένως

$(\Pi_1): \boxed{x+1=0}$

(δ) $(\Pi_1): \; x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$(\varepsilon_2): \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \nexists$ κοινή λύση του συστήματος

άρα $(\Pi_1) \cap \{\varepsilon_2\} = \emptyset$

Απόσταση σημείου από επίπεδο

$P_0(x_0, y_0, z_0)$

και επίπεδο $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$

τότε $d(P_0, \Pi) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$