Θ. ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ

Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $T: X \to Y$ συνάρτηση. Το γράφημα της T είναι

$$G_T = \{ (x, Tx) \mid x \in X \} \subseteq X \times Y$$

Εάν T συνεχής, τότε G_T κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$ (με την τοπολογία γινόμενο τ).

[Πράγματι έστω $(x,y) \in \overline{G_T}^{\tau}$. Τότε, $\exists$ δίκτυο $(x_\lambda) \subset X$ ώστε

$$x_\lambda \to x, \quad Tx_\lambda \to y$$

$$\overset{T \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} \quad Tx_\lambda \to Tx \quad \Rightarrow \quad y = Tx.]$$

Εάν X, Y μετρικοί χώροι, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) G_T κλειστό

(ii) $\forall\, (x_n) \subset X$, $x \in X$, $y \in Y$, με

$$x_n \to x, \quad Tx_n \to y,$$

ισχύει $y = Tx$.

<u>Σχόλιο</u>: Εάν G_T κλειστό, <u>δεν</u> έπεται εν γένει ότι T συνεχής!

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $X = Y = \mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική και
$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Τότε, G_T κλειστό $\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

[Πράγματι· έστω $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$ | $x_n \to x$, $Tx_n \to y$

• Εάν $x \neq 0$, τότε $x_n \neq 0$, τελικώς

$\Rightarrow$ $Tx_n = \frac{1}{x_n}$, τελικώς

$\Rightarrow$ $Tx_n \to \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{x} = Tx$.

• Έστω $x = 0$. Εάν $y \neq 0$, τότε $Tx_n \neq 0$ τελικώς $\Rightarrow$ $Tx_n = \frac{1}{x_n}$, τελικώς $\Rightarrow$ $\frac{1}{x_n} \to y \neq 0$

$\Rightarrow$ $x_n \to 1/y$ (Άτοπο!)

Άρα, $y = 0 = Tx$.]

Αλλά, T <u>ασυνεχής</u>! Πράγματι·
$$\frac{1}{n} \to 0, \quad T\left(\frac{1}{n}\right) = n \to \infty.$$

Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι Banach. Στον $X \times Y$ ορίζουμε τη νόρμα

$$\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y. \qquad (1)$$

Τότε, ο $(X \times Y, \|\cdot\|)$ είναι Banach (άσκηση!)

Θεώρημα 1 (Θ. Κλειστού Γραφήματος)

Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$ γραμμικός. Εάν G_T κλειστό στον $X \times Y$, τότε T συνεχής (φραγμένος).

Απόδειξη: Επειδή T γραμμικός, το G_T είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $X \times Y$ = Banach

$\Longrightarrow$ $(G_T, \|\cdot\|)$ Banach,

όπου $\|\cdot\|$ η νόρμα που δίνεται από την (1).

Η προβολή $P: X \times Y \to X$, $P(x,y) = x$, είναι συνεχής (γραμμική)

$\Longrightarrow$ ο $S = P|_{G_T} : G_T \to X$ είναι γραμμικός, φραγμένος.

Επιπλέον, ο $S : G_T \to X$ είναι

<u>1 − 1</u>, <u>επί</u>

$\underset{\text{Απεικ.}]}{\xRightarrow{\text{[Θ-Ανοικτής}}}$ $S^{-1} : X \to G_T$ φραγμένος

$\Rightarrow \exists M > 0 \mid \forall x \in X,$

$$\|S^{-1}x\| \leq M\|x\|_X$$

$\xRightarrow{[S^{-1}x = (x, Tx)]}$ $\|x\|_X + \|Tx\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X$

$\Rightarrow \quad \|Tx\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X, \ \forall x \in X$

$\Rightarrow \quad T$ φραγμένος. $\boxtimes$

<u>Εφαρμογές:</u>

(1) $X = C[0,1] = \{u : [0,1] \to \mathbb{R} \mid u$ συνεχής$\}$.

Εφοδιάζουμε τον X με τις νόρμες

$$\|u\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|, \quad \|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)|\,dt.$$

Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή

$$I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_\infty).$$

Γνωρίζουμε ότι $(X, \|\cdot\|_\infty)$ Banach.

<u>Ο I έχει κλειστό γράφημα.</u>

Πράγματι· έστω $(u_n) \subset X$, $u, v \in X$, με

$$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} u, \qquad u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} v.$$

Τότε, $\|u_n - v\|_1 = \int_0^1 |u_n(t) - v(t)|\,dt$

$$\le \|u_n - v\|_\infty \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} v \Longrightarrow v = u.$$

Ο I είναι <u>ασυνεχής</u>.

Πράγματι· έστω

$$u_n(t) = t^n, \ n \geq 1, \ t \in [0,1].$$

Τότε, $\|u_n\|_1 = \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$

αλλά $\|u_n\|_\infty = 1 \not\to 0.$

Από το Θ-κλειστού γραφήματος έπεται ότι ο

$$\left(C[0,1], \|\cdot\|_1\right)$$

<u>δεν</u> είναι Banach!

(2) Θέτουμε

$$C^1[0,1] = \{ u : [0,1] \to \mathbb{R} \mid u \text{ παραγωγίσιμη με } u' \text{ συνεχή} \}.$$

Θεωρούμε τον τελεστή

$$T : (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$$

με

$$Tu = u'.$$

Προφανώς, ο T είναι γραμμικός.

<u>Ο T έχει κλειστό γράφημα.</u>

Πράγματι· έστω $(u_n) \subset C^1[0,1]$, $u \in C^1[0,1]$, $v \in C[0,1]$, ώστε

$$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u, \quad Tu_n = u_n' \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} v.$$

Τότε, $u_n' \to v$ <u>ομοιόμορφα</u> στο $[0,1]$

$$\Rightarrow \forall t \in [0,1], \quad \int_0^t u_n'(s)\,ds \to \int_0^t v(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0,1], \quad u_n(t) - u_n(0) \to \int_0^t v(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0,1], \quad u(t) = u(0) + \int_0^t v(s)\,ds.$$

Έπεται ότι $u \in C^1[0,1]$ και

$$u'(t) = v(t), \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\Longrightarrow \quad v = Tu.$$

<u>Ο T είναι ασυνεχής</u>. Πράγματι:

Θέτουμε: $u_n(t) = \frac{t^n}{n}$, $t \in [0,1]$, $n \geq 1$.

Τότε, $(u_n) \subset C^1[0,1]$ και

$$\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n} \longrightarrow 0, \quad u_n'(t) = t^{n-1},$$

$$\|u_n'\|_\infty = 1 \not\to 0.$$

Από Θ. Κλειστού Γραφήματος,

ο $\left(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ <u>δεν</u> είναι Banach!

(3) <u>(Θ. Hellinger–Toeplitz)</u> Έστω H χώρος <u>Hilbert</u> και $T : H \to H$ γραμμικός, <u>αυτοσυζυγής</u>, δηλ.

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

Τότε, T φραγμένος.

Πράγματι: αρκεί να δ.ο. G_T κλειστό.

Έστω $(x_n) \subset H$, $x, y \in H$, ώστε
$$x_n \to x, \quad Tx_n \to y.$$
Τότε, $\forall z \in H$,
$$\langle Tx, z\rangle = \langle x, Tz\rangle = \lim_n \langle x_n, Tz\rangle$$
$$= \lim_n \langle Tx_n, z\rangle = \langle y, z\rangle$$
$$\Longrightarrow \langle y - Tx, z\rangle = 0, \ \forall z \in H \Rightarrow y = Tx.$$

(4) Έστω $\|\cdot\|$ νόρμα στον $C[0,1]$ ώστε

- ο $(C[0,1], \|\cdot\|)$ είναι <u>Banach</u>
- $\forall (u_n) \subset C[0,1]$, $u \in C[0,1]$ με $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$,

ισχύει
$$u_n(t) \to u(t), \ \forall t \in [0,1].$$

Τότε, οι $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\infty$ **είναι** ισοδύναμες.

Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή $I : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|)$

• ο I έχει κλειστό γράφημα.

Πράγματι έστω $(u_n) \subset C[0,1]$, $u, v \in C[0,1]$ |

$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$, $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} v$.

Από την $1^{\underline{\eta}}$ έπεται ότι
$\forall t \in [0,1]$, $u_n(t) \to v(t)$.

Επιπλέον, λόγω της υπόθεσης η $2^{\underline{\eta}}$ δίνει ότι
$\forall t \in [0,1]$, $u_n(t) \to u(t)$.

Άρα, $v(t) = u(t)$, $\forall t \in [0,1] \Rightarrow v = u$.

Επειδή οι $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $(C[0,1], \|\cdot\|)$

είναι Banach, το Θ - κλειστού Γραφήματος δίνει ότι
I φραγμένος.

Αλλά, I $\underline{1-1}$, $\underline{επί}$ $\xrightarrow[\text{Απεικ.}]{}$ [Θ. Ανοικτής Απεικ.]

ο I είναι $\underline{ισομορφισμός}$

$\Rightarrow$ οι $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\infty$ είναι ισοδύναμες.

(5) <u>Συμπληρωματικοί υπόχωροι</u>

<u>Ορισμός</u>: Έστω X χώρος Banach και Y <u>κλειστός</u> γραμμικός υπόχωρος. Ο Y λέγεται <u>συμπληρωματικός</u> ανν

$\exists$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος Z του X ώστε

$$X = Y \oplus Z \quad \text{δηλ.}$$
$$X = Y + Z, \qquad Y \cap Z = \{0\}.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και Y κλειστός γραμμ. υπόχ. Τότε,

$$\mathcal{H} = Y \oplus Y^{\perp},$$

όπου

$$Y^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, \ \forall y \in Y\}$$

$\Rightarrow$ Y συμπληρωματικός.

Ορίζεται η προβολή $P_Y : \mathcal{H} \to Y$ με

$$P_Y(y+z) = y, \quad \forall y \in Y, \forall z \in Y^{\perp}.$$

Η P_Y είναι φραγμένος, γραμμικός τελεστής και

$$\operatorname{Im} P_Y = Y, \qquad \ker P_Y = Y^{\perp}.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} P_Y \circ P_Y = P_Y, \\ P_Y \text{ επί του } Y. \end{cases}$$

<u>Πρόταση</u>: Έστω X χώρος Banach και Y κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Y συμπληρωματικός

(ii) $\exists\ P: H \to Y$ φραγμένος γραμμικός <u>επί</u> ώστε $P \circ P = P$.

<u>Απόδειξη</u>: <u>(i) $\Rightarrow$ (ii)</u> Έστω Z κλειστός γραμμ. υπόχ. του X ώστε

$$X = Y \oplus Z.$$

Ορίζουμε

$$P: X = Y \oplus Z \to Y \text{ με}$$
$$P(y+z) = y, \quad \forall y \in Y,\ \forall z \in Z.$$

[Σημ. ότι P καλώς ορισμένη, διότι κάθε $x \in X$ γράφεται <u>μονοσήμαντα</u> ως άθροισμα

$$x = y + z, \quad y \in Y,\ z \in Z.]$$

Προφανώς, P γραμμικός τελεστής <u>επί</u>.

• <u>ο P έχει κλειστό γράφημα.</u>

Πράγματι· έστω $(x_n) \subset X$, $x \in X$, $y \in Y$ |

$$x_n \to x, \quad Px_n \to y.$$

$\forall n, \ \exists! \ y_n \in Y, \ z_n \in Z \mid$

$$x_n = y_n + z_n.$$

Τότε,

$$z_n = x_n - y_n = x_n - Px_n \to x - y$$

[Z κλειστός]
$\Longrightarrow$ $\cancel{x} - y \in Z$.

Τότε, $x = \underbrace{(x-y)}_{\substack{\cap \\ Z}} + \underset{\substack{\cap \\ Y}}{y}$

$\Longrightarrow \quad Px = y.$

Επειδή Y κλειστός, θα είναι Banach
[Θ. κλειστού $\Longrightarrow$ γραφ.] P φραγμένος.

Τέλος, αν $x = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$, τότε

$$Px = y = \underset{\substack{\cap \\ Y}}{y} + \underset{\substack{\cap \\ Z}}{0} \Longrightarrow P(Px) = y = Px$$

$\Longrightarrow \quad P \circ P = P.$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Έστω $P : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός επί με $P \circ P = P$. Θέτουμε $Z = \ker P$ — κλειστός.

$\forall x \in X$,

$$x = (x - Px) + Px$$

και

$$P(x - Px) = Px - P(Px) = Px - Px = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x - Px \in Z},$$

ενώ $\boxed{Px \in Y}$.

Άρα, $\boxed{X = Y + Z}$.

Επιπλέον, αν $z \in Z \cap Y$, τότε αφού P επί, $\exists\, x \in X \mid z = Px$

$$\Rightarrow \quad 0 = Pz = P(Px) = Px = z$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Y \cap Z = \{0\}}.$$

Άρα, $X = Y \oplus Z \Rightarrow Y$ συμπληρωματικός.

$\boxtimes$