$D = \{ f_k : k \geq 1 \} \subset X^{\#}$ χωρίζει σημεία

τ_D

$x_n \xrightarrow{\tau_D} x$ ανν $\forall\, k \geq 1$, $f_k(x_n) \xrightarrow{n} f(x)$

ανν $\forall\, k \geq 1$, $|f_k(x_n) - f(x)| \xrightarrow{n} 0$.

Εάν d μετρική στο X ώστε $\tau_d = \tau_D$, τότε

$x_n \xrightarrow{d} x$ ανν $\forall\, k \geq 1$, $|f_k(x_n) - f(x)| \xrightarrow{n} 0$.

Θέτω $d_k(x,y) = |f_k(x) - f_k(y)|$, $x, y \in X$, $k \geq 1$.

d_k ψευδομετρική δηλ.

- $d_k(x,y) \geq 0$
- $d_k(x,x) = 0$
- $d_k(x,z) \leq d_k(x,y) + d_k(y,z)$

$x_n \xrightarrow{d_k} x$ ανν $d_k(x_n, x) \to 0$

ανν $|f_k(x_n) - f_k(x)| \to 0$.

$(d_k)_{k\geq 1}$ ψευδομετρικές - Θέλω να βρω μια μετρική d | $x_n \xrightarrow{d} x$ ανν $\forall k$, $x_n \xrightarrow{d_k} x$

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k(x,y)}{1+d_k(x,y)}\cdot\frac{1}{2^k}\ ,\quad x,y\in X$$

• $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}\ \uparrow \qquad t\in[0,+\infty)$

$\Rightarrow$ αν $\quad a\leq b+\gamma \Rightarrow \frac{a}{1+a}\leq\frac{b}{1+b}+\frac{\gamma}{1+\gamma}$

$\Rightarrow$ η τριγωνική ανισ. για την d.

Δχωρίζει σημεία

• $d(x,y)=0 \Rightarrow \forall k,\ d_k(x,y)=0$

$\Rightarrow \forall k,\ |f_k(x)-f_k(y)|=0 \Rightarrow x=y$

$\varphi : [0,+\infty) \to [0,1) \qquad \varphi(t) = \frac{t}{1+t} \uparrow$

ομοιομορφισμός επί

- Έστω $x_n \xrightarrow{d_k} x$, $\forall k$ $\to \varphi(d_k(x_n,x))$

$$d(x_n,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \boxed{\frac{d_k(x_n,x)}{1+d_k(x_n,x)}} \cdot \frac{1}{2^k}$$

$\varepsilon > 0 \quad \exists N \mid \quad \sum_{k > N} \frac{1}{2^k} < \varepsilon/2$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x_n,x)}{1+d_k(x_n,x)} < \varepsilon/2, \quad \forall n \geq n_0$$

$\Rightarrow \dots \quad d(x_n, x) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$

Αντίστροφα, έστω $x_n \xrightarrow{d} x$ συγκ.

$$d(x_n, x) \to 0$$

$$\forall k, \quad 0 \leq \underbrace{\boxed{\frac{d_k(x_n, x)}{1 + d_k(x_n, x)}}}_{\varphi(d_k(x_n,x))} \cdot \frac{1}{2^k} \leq d(x_n, x)$$

$$\Rightarrow \forall k, \quad \varphi(d_k(x_n, x)) \to 0 = \varphi(0) \xRightarrow{\varphi \text{ ομοιομ.}}$$

$$\forall k, \quad \underline{d_k(x_n, x) \to 0}$$

- A w-συμπαγές $\overset{(X,\|\cdot\|)}{\Longrightarrow}$ A $\|\cdot\|$-φραγμένο
- Εάν $D \subset X^*$ $\|\cdot\|$-πυκνό $\Longrightarrow$ <u>D χωρίζει σημεία</u>.

- <u>Θεώρημα 14</u>: Εάν <u>A $\|\cdot\|$ φραγμένο</u> κ' υπάρχει $D \subset X^*$ αριθμήσιμο $\|\cdot\|$-πυκνό, τότε $(A, \tau_w|_A)$ μετρικοποιήσιμος

{ Θα δ.ο. αν A w-συμπαγές κ' $D \subset X^*$ αριθμήσιμο που χωρίζει σημεία, τότε $(A, \tau_w|A)$ μετρικοπ.

- Εάν $\underline{X \text{ διαχωρ.}}$, τότε κάθε w-συμπαγής είναι w-μετρικοποιήσιμος.