

ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ «ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ» ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022.

1. Στοιχεία Γενικής Τοπολογίας (χωρίς αποδείξεις). Εισαγωγικά στα δίκτυα (χωρίς αποδείξεις).
2. Τοπολογικοί γραμμικοί χώροι. Βασικές έννοιες και ιδιότητες με αποδείξεις. **Εξαιρούνται οι αποδείξεις της Πρότ. 6 και του Θ.10, από το αναρτημένο αρχείο «ΤΟΠΟΛ. ΓΡΑΜΜ. ΧΩΡΟΙ ΜΕΡΟΣ Α».**
3. Γενικά για ασθενείς τοπολογίες. Ασθενής τοπολογία T_Φ που επάγεται σε γραμμικό χώρο X από οικογένεια Φ γραμμικών συναρτησιακών που διαχωρίζει σημεία. Βάση περιοχών του 0 και ασθενής σύγκλιση. Τοπολογικός δυϊκός του τοπολ. γραμμ. χώρου (X, T_Φ) . Το αποτέλεσμα ότι στην άπειρη διάσταση, η T_Φ δεν ταυτίζεται με τοπολογία νόρμας. Επιπλέον, το αποτέλεσμα ότι εάν η Φ είναι αριθμήσιμη, ο (X, T_Φ) είναι μετριοποιήσιμος (χωρίς απόδειξη).
4. **Εξαιρείται πλήρως το αναρτημένο αρχείο «ΤΟΠΟΛ. ΓΡΑΜΜ. ΧΩΡΟΙ ΜΕΡΟΣ Β», που αφορά στους Τοπολογικούς Γραμμικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης.**
5. Θετικά υπογραμμικά συναρτησιακά (χωρίς αποδείξεις). Αναλυτική μορφή Θ . Hahn-Banach και συνέπειες (χωρίς αποδείξεις). Οι δύο μορφές των Γεωμετρικών Θ . Hahn-Banach σε τοπολογικούς γραμμ. χώρους (χωρίς αποδείξεις).
6. Βασικές συνέπειες του Θ . Baire σε χώρους Banach: Θεωρήματα Ομοιομόρφου Φράγματος, Ανοικτής Απεικόνισης και Κλειστού Γραφήματος κι εφαρμογές αυτών. Από το αναρτημένο αρχείο «**Θ.ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ**» **εξαιρούνται η απόδειξη του ομώνυμου θεωρήματος, καθώς και οι εφαρμογές (4) και (5).**
7. Ασθενής (w) τοπολογία ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$. Ορισμός και βασικές ιδιότητες. Το αποτέλεσμα ότι κάθε ασθενώς συμπαγές είναι $\|\cdot\|$ -φραγμένο. Χαρακτηρισμός w -σύγκλισης ακολουθίας στο χώρο c_0 (**εξαιρείται η απόδειξη της ισομετρικής ταύτισης $c_0^* \equiv l^1$**).

Θ . Mazur.

Μελέτη της μετριοποιησιμότητας της ασθενούς τοπολογίας και πιο συγκεκριμένα, τα παρακάτω αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην τάξη:

- Ένας απειροδιάστατος χώρος με νόρμα δεν είναι w - μετριοποιήσιμος.
 - Σε ένα διαχωρίσιμο χώρο με νόρμα, κάθε w -συμπαγές υποσύνολο είναι w -μετριοποιήσιμο.
 - Η μοναδαία μπάλα ενός χώρου με νόρμα είναι w - μετριοποιήσιμη αν ο χώρος έχει διαχωρίσιμο δυϊκό (χωρίς απόδειξη).
 - Ιδιότητα Schur του χώρου l^1 (χωρίς απόδειξη).
8. Θ . Eberlein-Smulian (η απόδειξη μόνο της μιας κατεύθυνσης: κάθε w -συμπαγές είναι ακολουθιακά w - συμπαγές).
 9. Ασθενής* (w^*) τοπολογία του δυϊκού X^* ενός χώρου με νόρμα. Ορισμός και βασικές ιδιότητες. Το αποτέλεσμα ότι κάθε w^* - συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι $\|\cdot\|$ -φραγμένο. Η έλλειψη θεωρήματος τύπου Mazur για την w^* -τοπολογία.

Θεωρήματα Goldstine και Αλάογλου.

Μελέτη της μετριοποιησιμότητας της ασθενούς* τοπολογίας και πιο συγκεκριμένα, τα παρακάτω αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην τάξη **(χωρίς αποδείξεις)**:

-- Ένας χώρος με νόρμα είναι w^* -μετριοποιήσιμος αν έχει το πολύ αριθμήσιμη βάση Hamel.

-- Η μοναδιαία μπάλα του δυϊκού ενός διαχωρίσιμου χώρου με νόρμα είναι w^* -συμπαγής μετριοποιήσιμος τοπολογικός χώρος.

10. Ανακλαστικοί χώροι Banach. Χαρακτηρισμός μέσω της w -συμπάγειας της μοναδιαίας μπάλας και ακολουθιακός χαρακτηρισμός. Ανακλαστικότητα κλειστών υπόχωρων και του δυϊκού ενός ανακλαστικού χώρου. Παραδείγματα μη ανακλαστικών χώρων. Ανακλαστικότητα χώρων Hilbert και των χώρων l^p , $1 < p < \infty$.

11. Βασικές ιδιότητες του μέτρου Lebesgue και των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων **(χωρίς αποδείξεις)**. Σχεδόν παντού κατά σημείο σύγκλιση ακολουθίας.

Ανισότητες Hölder, Minkowski. Ορισμός των χώρων $L^p(0,1)$ $1 \leq p \leq \infty$ και βασικές ιδιότητες: πληρότητα της νόρμας και διαχωρισιμότητα για $p < \infty$ **(χωρίς αποδείξεις)**. Σχέση $\|\cdot\|_p$ –σύγκλισης και σχεδόν παντού κατά σημείο σύγκλισης ακολουθίας **(χωρίς απόδειξη)**.

$1^{\text{η}}$ ανισότητα Clarkson. **Εξαιρείται η $2^{\text{η}}$ ανισότητα Clarkson.**

Ανακλαστικότητα του χώρου $L^p(0,1)$ $1 < p < \infty$ **(χωρίς απόδειξη)**.

Η ισομετρική ταύτιση του δυϊκού του χώρου $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$ **με το χώρο**

$L^q(0,1)$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.