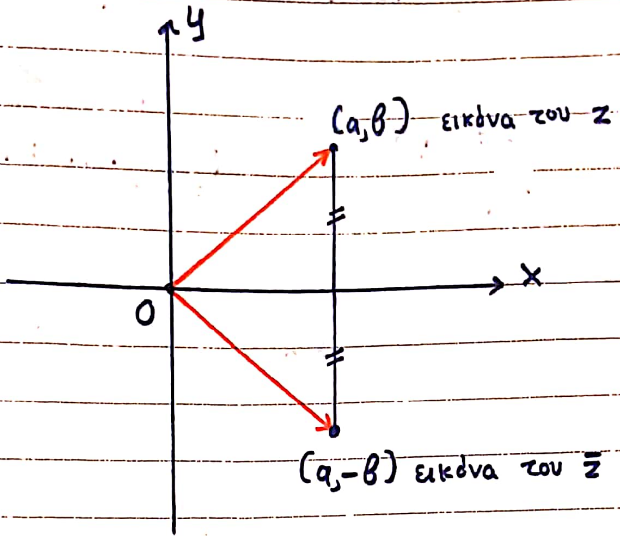
Συζυγής Μιγαδικός

$z = a + \beta i$, $a, \beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\bar{z} = a - \beta i}$ άρα $\boxed{\overline{(\bar{z})} = z}$



Ιδιότητες

(i) $\boxed{z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}}$ και $\boxed{z = -\bar{z} \iff z \in \mathbb{I}}$

(ii) $\boxed{\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}}$ και $\boxed{\overline{az} = a \cdot \bar{z} \, , \forall a \in \mathbb{R}}$ Γραμμικότητα του Συζυγούς

(iii) $\boxed{\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}}$

(iv) $\boxed{\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}}$ $(w \neq 0)$

(v) $\boxed{z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Real}(z)}$ Πολύ χρήσιμη

(vi) $\boxed{z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z) \cdot i}$

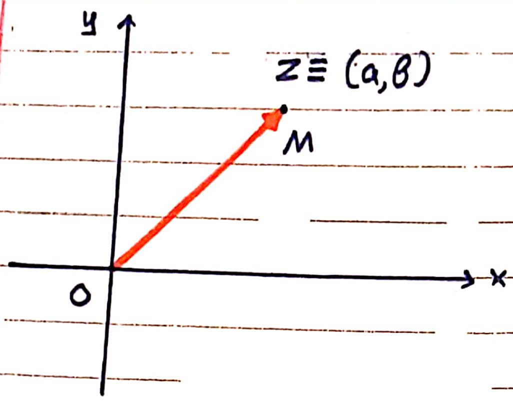
(vii) $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει : $\boxed{\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n}$

④

Μέτρο

$z = a + \beta i$

$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+\beta^2}}$, $|z| \geq 0$ πάντα



άρα $\boxed{|z| = |\vec{OM}|}$

Ιδιότητες

Έστω $z, w \in \mathbb{C}$

2 πολύ εξυπηρετικές μορφές της ιδιότητας αυτής

(i) $\boxed{|z|^2 = z \cdot \bar{z}}$ Μαγική Ιδιότητα $\Leftrightarrow$ $\boxed{\bar{z} = \dfrac{|z|^2}{z}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{z = \dfrac{|z|^2}{\bar{z}}}$

(ii) $\boxed{|z \cdot w| = |z| \cdot |w|}$

Απόδ. $|z \cdot w|^2 \underset{(i)}{=} (zw) \cdot \overline{(zw)} =$

$= z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} =$

$= (z \cdot \bar{z}) \cdot (w \cdot \bar{w}) \overset{(i)}{=}$

$= |z|^2 \cdot |w|^2 \Leftrightarrow$ $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, ό.έ.δ.

iii) Εάν $w \neq 0$: $\boxed{\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}}$

(iv) $\boxed{|\bar{z}| = |z|}$

(v) $\boxed{|z| = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{\bar{z}}}$ Πολύ χρήσιμο σε Ασκήσεις

(vi) Ιδιότητα Παραλληλογράμμου
(ή Θεώρημα Διαμέσων αν το δεις Γεωμετρικά)

$$\boxed{|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)}$$

Απόδειξη:

Ο μόνος τρόπος να χειριστής μέτρο αθροίσματος ή μέτρο διαφοράς είναι να υψώσεις στο τετράγωνο (ακόμα και αν το τετράγωνο δεν υπάρχει στην τελική σχέση) και μετά να χρησιμοποιήσεις την ιδιότητα (i).

$$|z+w|^2 = (z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w}) =$$
$$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} =$$
$$= |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2$$
, ομοίως:

$$|z-w|^2 = |z|^2 - z\bar{w} - w\bar{z} + |w|^2$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο, ό.έ.δ.

(vii) $\forall n \in \mathbb{Z}$, ισχύει $\boxed{|z^n| = |z|^n}$

⑥

(viii) $\boxed{|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,Real(z\bar{w})}$ Πολύ Χρήσιμη

[η απόδειξη βασίζεται στο ότι :

Εάν $a \in \mathbb{C}$, τότε $a + \bar{a} = 2\,Real(a)$]

Απόδειξη:

$$|z+w|^2 = (z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w}) =$$
$$= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} =$$
$$= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \overline{(z\bar{w})} \Leftrightarrow$$

$\underline{|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,Real(z\bar{w})}$ $\Leftrightarrow$ (είναι το ίδιο με)

$\underline{|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,Real(\bar{z}w)}$ ό.έ.δ.

(ix) $\boxed{|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,Real(z\bar{w})}$ Πολύ Χρήσιμη

[η απόδειξη βασίζεται στην ίδια ιδιότητα με πριν]

Απόδειξη:

$$|z-w|^2 = (z-w)\cdot(\bar{z}-\bar{w}) =$$
$$= z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w} =$$
$$= |z|^2 + |w|^2 - \left[z\bar{w} + \overline{(z\bar{w})}\right] \Leftrightarrow$$

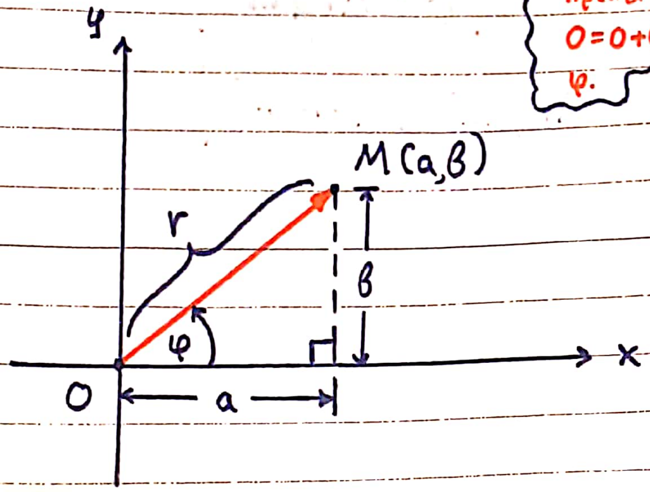
$\underline{|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,Real(z\bar{w})}$ $\Leftrightarrow$ (είναι το ίδιο με)

$\underline{|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,Real(\bar{z}w)}$ ό.έ.δ.

Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού Αριθμού.

(καθοριστικής σημασίας για πράξεις και κυρίως για ύψωση σε μεγάλες δυνάμεις)

Αν: $z = \alpha + \beta i$ $\quad z \neq 0$ → **Προσοχή!** για να έχει Τριγωνομετρική μορφή ένας μιγαδικός πρέπει υποχρεωτικά να είναι διάφορος του $0 = 0 + 0i$, ώστε να μπορεί να οριστεί γωνία φ.



Είναι:

$$\boxed{\alpha = r \cdot \cos\varphi} \quad κ' \quad \boxed{\beta = r \cdot \sin\varphi}$$

Άρα:

$$z = \alpha + \beta i \iff$$

$$z = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi \iff$$

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) \iff$$

$$\boxed{z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)} \quad (1)$$

Τριγωνομετρική Μορφή του μιγαδικού z

Σχόλιο: Εάν η φ ικανοποιεί την (1) τότε και $\forall \kappa \in \mathbb{Z}$, η $\varphi + 2\kappa\pi$ επίσης ικανοποιεί την (1).

Ορισμός : Μια γωνία φ που ικανοποιεί την (1) ονομάζεται **όρισμα** του z.

Η μοναδική $\boxed{\varphi_0 \in (-\pi, \pi]}$ που ικανοποιεί την (1) ονομάζεται **πρωτεύον όρισμα** του z, και συμβολίζεται με:

$$\boxed{\varphi_0 = Arg(z)}$$

δηλ. $\boxed{Arg(z) \in (-\pi, \pi]}$

Πρόταση 1: Πολύ χρήσιμη, θα την χρησιμοποιούμε συνέχεια.

Έστω $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($z, w \neq 0$ για να μπορεί να οριστεί τριγωνομετρική μορφή γι' αυτούς)

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

$w = |w| \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$. Τότε:

Μιγαδικοί ίσοι $z = w \overset{\text{ανν}}{\iff} \begin{cases} \bullet\ |z| = |w| & \text{μέτρα ίσα} \\ \bullet\ \exists\, k \in \mathbb{Z} \mid \varphi - \theta = 2k\pi & \text{ορίσματα που διαφέρουν κατά ακέραιο πολ/σιο του } 2\pi \end{cases}$

Απόδειξη:

($\Leftarrow$) : άμεσο

($\Rightarrow$): Έστω ότι $z = w$

• Τότε $|z| = |w|$, προφανώς

• $z = w \xRightarrow[\text{αφού } z,w \neq 0]{|z| = |w| \neq 0} \cos\varphi + i\sin\varphi = \cos\theta + i \cdot \sin\theta \Rightarrow$

$\begin{cases} \cos\varphi = \cos\theta & (\mathrm{I}) \\ \sin\varphi = \sin\theta & (\mathrm{II}) \end{cases}$

$\cos(\varphi - \theta) = \cos\varphi \cdot \cos\theta + \sin\varphi \cdot \sin\theta \overset{(\mathrm{I})}{\underset{(\mathrm{II})}{=}} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$\sin(\varphi - \theta) = \sin\varphi \cdot \cos\theta - \sin\theta \cdot \cos\varphi \overset{(\mathrm{I})}{\underset{(\mathrm{II})}{=}} \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0$

Άρα $\exists\, k \in \mathbb{Z} \mid \varphi - \theta = 2k\pi$ Άρα ό.έ.δ.

Scanned with CamScanner

Η Εκθετική Συνάρτηση e^z, $z \in \mathbb{C}$

Το ζήτημα είναι να το ορίσουμε για z φανταστικό γιατί τότε τελειώσαμε.

Κίνητρο: Θυμάμαι την Δυναμοσειρά της e^x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

Θέτω $x = \theta i$, $\theta \in \mathbb{R}$ (κάπως περίεργο αλλά το κάνω)

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{\theta}{1!} \cdot i - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3}{3!} i + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5}{5!} \cdot i - \frac{\theta^6}{6!} + \dots =$$

$$\overset{⊛}{=} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i \cdot \left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) =$$

$$= \cos\theta + i \cdot \sin\theta$$

(άρα αν πρόκειται να ορίσω κάπως το $e^{i\theta}$ θα πρέπει να το ορίσω έτσι:

⊛ και εδώ ανακατατάσσω τους όρους δυναμοσειράς χωρίς να ξέρω αν συγκλίνει απολύτως (περίεργο αλλά το κάνω)

Ορισμός 2: $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Τύπος του Euler

Ορισμός 3: Εάν $z = a + \theta i$, $a, \theta \in \mathbb{R}$,

ορίζουμε $\boxed{e^{z} = e^{a} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) = e^{a} \cdot e^{i\theta}}$

Ιδιότητες:

(i) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{|e^{i\theta}| = 1}$

(ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\boxed{|e^{z}| = e^{Real(z)}}$ ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ χρησιμοποιείται σε τρικ σε διάφορες ασκήσεις

(iii) $\boxed{e^{z} \neq 0}$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Απόδειξη: Απ' την (ii) έχουμε $|e^{z}| = e^{Real(z)} > 0$ αφού $a = Real(z) \in \mathbb{R}$, άρα $|e^{z}| \neq 0 \iff e^{z} \neq 0$, ό.έ.δ.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Το $e^{z} > 0$ είναι ΛΑΘΟΣ γιατί ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ διάταξη στους Μιγαδικούς!

(iv) $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $\boxed{e^{z+w} = e^{z} \cdot e^{w}}$

(v) Η Εκθετική Συνάρτηση e^z έχει $2\pi i$ - περιοδικότητα

(όχι μόνο δεν είναι 1-1 όπως η $e^x, x\in\mathbb{R}$, αλλά επιπλέον είναι κ' περιοδική)

$$\boxed{e^z = e^w \iff \exists k\in\mathbb{Z} \mid z-w = 2k\pi i}$$

ή αλλιώς

$$\boxed{e^{z+2k\pi i} = e^z}$$

Απόδειξη:

$z = a+\beta i$, $w = \gamma+\delta i$

$$e^z = e^w \iff e^a\cdot(\cos\beta + i\sin\beta) = e^\gamma\cdot(\cos\delta + i\sin\delta)$$

$$\xLeftrightarrow{\text{Πρόταση 1}} \begin{cases} e^a = e^\gamma \\ \exists k\in\mathbb{Z} \mid \beta-\delta = 2k\pi \end{cases} \xLeftrightarrow[\text{αφού } a,\gamma\in\mathbb{R}]{y=e^x \text{ είναι 1-1 στο } \mathbb{R}}$$

$$\begin{cases} a=\gamma & \text{I} \\ \beta-\delta = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} & \text{II} \end{cases}$$

άρα: $z-w = \cancel{a}+\beta i-\cancel{\gamma}-\delta i \overset{\text{I}}{\iff}$

$$z-w = (\beta-\delta)i \xlongequal[\exists k\in\mathbb{Z} \text{ τέτοιο ώστε}]{\text{II}} 2k\pi i$$

, ό.έ.δ.

(vi) $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall \lambda\in\mathbb{Z}$, $\boxed{(e^z)^\lambda = e^{\lambda z}}$

Απόδειξη: με Επαγωγή

Τύπος De Moivre

Αν $z=|z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z\neq 0$,

τότε $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$: (για κάθε εκθέτη ακέραιο)

$$\boxed{z^{\lambda} = |z|^{\lambda}\cdot\left[\cos(\lambda\varphi) + i\sin(\lambda\varphi)\right]}$$

Απόδειξη:

$z=|z|\cdot e^{i\varphi}$

$z^{\lambda} = |z|^{\lambda}\cdot\left(e^{i\varphi}\right)^{\lambda} \overset{(iv)}{=}$

$= |z|^{\lambda}\cdot e^{i\lambda\varphi} =$

$= |z|^{\lambda}\cdot\left[\cos(\lambda\varphi) + i\sin(\lambda\varphi)\right]$ ő.έ.δ.

Εφαρμογή: $(1+i)^{10} = ;$

$|1+i| = \sqrt{2}$, άρα

$1+i = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$= \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$

αυτός είναι ο τρόπος για να βρίσκεις τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού από καρτεσιανή.

Άρα: $(1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\cdot\left[\cos\frac{10\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{10\pi}{4}\right] =$

$= 2^5\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{2}\right) =$

$= 2^5\left[\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right] \Leftrightarrow$

$(1+i)^{10} = 2^5\cdot(0+1\cdot i) = 32\cdot i$

Τύπος De Moivre

Αν $z \neq 0$ με $z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

τότε:

$$\boxed{z^{\lambda} = |z|^{\lambda} \cdot [\cos(\lambda\varphi) + i \cdot \sin(\lambda\varphi)]}, \ \forall \lambda \in \mathbb{Z}$$

Συμπληρωματικά:

Εαν $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, $w = |w| \cdot e^{i\theta}$ με $z \neq 0$ και $w \neq 0$

(i) $\boxed{z \cdot w = |z \cdot w| \cdot e^{i(\varphi+\theta)}}$,

(ii) $\boxed{\dfrac{z}{w} = \left|\dfrac{z}{w}\right| \cdot e^{i(\varphi-\theta)}}$,

που είναι κατ' ευθείαν σε τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

δηλ.:

$\boxed{\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w}$

$\boxed{\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w}$

arg και όχι Arg, δηλ. ένα δυνατό όρισμα και όχι απαραίτητα το πρωτεύον όρισμα

δηλ.: Εαν φ, θ ορίσματα των z, w τότε:

→ το $\varphi+\theta$ είναι ένα όρισμα του $z \cdot w$

→ το $\varphi-\theta$ είναι ένα όρισμα του $\dfrac{z}{w}$

Ρίζες Μιγαδικού Αριθμού

Ρίζες της Μονάδος

Αναζητούμε ρίζες της εξίσωσης: $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ (1) $(z \in \mathbb{C})$

[π.χ. $z^5 = 1$, $z = ;$ αν $z \in \mathbb{C}$]

Εδώ φαίνεται η πολύ μεγάλη χρησιμότητα της Τριγωνομετρικής Μορφής και του Τύπου De Moivre.

Έστω $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ μια ρίζα της εξίσωσης $z^n = 1$
με $-\pi < \varphi \leq \pi$ ↳ προφανώς το 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, δηλ. οποιαδήποτε ρίζα της είναι $\neq 0$, άρα θα έχει τριγωνομετρική μορφή.

Άρα η (1) $\Leftrightarrow$ $|z|^n \cdot e^{in\varphi} = 1 \cdot e^{i0}$ $\Leftrightarrow$ (αναγκαστικά)

$$\begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\varphi - 0 = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ n\varphi = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |z| = 1 \quad (\mathrm{I}) \\ \varphi = \dfrac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(I) σίγουρα οι ρίζες είναι μιγαδικοί με μέτρο 1

Προσοχή! Αν όμως σταματήσουμε εδώ, έχουμε ότι μια εξίσωση n-οστού βαθμού έχει άπειρες ρίζες για όλα τα $k \in \mathbb{Z}$, ενώ ως n-οστού βαθμού μπορεί να έχει το πολύ n ρίζες.

Άλλωστε δεν έχει νόημα να έχουμε ρίζες για όλες τις άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$, αφού αν π.χ. έχουμε μια ρίζα για $k = a$ τότε αυτή θα έχει όρισμα $\varphi = \frac{2a\pi}{n}$

και η ρίζα για $k=a+n$ θα έχει όρισμα $\theta = \frac{2a\pi}{n} + 2\pi$, δηλ. τα ορίσματα των 2 αυτών ριζών θα διαφέρουν κατά 2π, δηλ. οι δύο αυτές ρίζες θα είναι ίδιες.
Παρατηρούμε δηλ. ότι για τιμές του k εκτός ενός πεπερασμένου πλήθους, οι ρίζες αρχίζουν και επαναλαμβάνονται.

Για αυτό κάνουμε το εξής:

Εαν $k \geq n$, εκτελώ την Ευκλείδια Διαίρεση:

$$\begin{array}{c|c} k & n \\ \hline u & m \end{array}$$

$u = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, άρα

$$\varphi = \frac{2k\pi}{n} = \frac{2(m \cdot n + u)}{n} \cdot \pi = 2m\pi + \frac{2u\pi}{n} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\varphi = 2m\pi + \frac{2u\pi}{n}, \quad u = 0, 1, 2, \ldots, n-1}, \quad \text{άρα}$$

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} = \underbrace{|z|}_{1} \cdot e^{i\left(2m\pi + \frac{2u\pi}{n}\right)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{η } e^z \text{ είναι} \\ 2\pi i \text{ περιοδική} \end{array}\right)$$

$$\boxed{z = e^{i\frac{2u\pi}{n}}}, \quad u = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \quad \text{άρα:}$$

Θεώρημα:

για $n=0$ η εξίσωση δεν έχει νόημα γιατί γίνεται $1=1$ που ισχύει πάντα ως ταυτότητα

Για $n \geq 1$, οι n-οστές ρίζες της μονάδος (δηλ. οι ρίζες της εξίσωσης $z^n = 1$) είναι οι:

ο τύπος αυτός χρησιμοποιείται απ' έξω

$$\boxed{z_u = e^{i\frac{2u\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2u\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2u\pi}{n}\right)} \quad u = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Παρατηρήσεις:
1) Οι n-οστές ρίζες της μονάδος είναι n το πλήθος
2) Είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους (δηλ. όλες έχουν πολ/τητα 1)
3) Πάντα μια ρίζα της μονάδος θα είναι το 1.

Παράδειγμα:

Να λυθεί η εξίσωση $z^6 = 1$.

Λύση:

Για $\nu=0$: $z_0 = 1$ είναι πάντα ρίζα.

Για $\nu=1$: $z_1 = \cos\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{6}_3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{6}_3}\right) \Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Για $\nu=2$: $z_2 = \cos\left(\frac{\cancel{4}^{2}\pi}{\cancel{6}_3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\cancel{4}^{2}\pi}{\cancel{6}_3}\right) =$

$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Για $\nu=3$: $z_3 = \cos\left(\frac{\cancel{6}\pi}{\cancel{6}}\right) + i\sin\left(\frac{\cancel{6}\pi}{\cancel{6}}\right) \Leftrightarrow z_3 = -1$

Για $\nu=4$: $z_4 = \cos\left(\frac{\cancel{8}^{4}\pi}{\cancel{6}_3}\right) + i\sin\left(\frac{\cancel{8}^{4}\pi}{\cancel{6}_3}\right) =$

$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Για $\nu=5$: $z_5 = \cos\left(\frac{\cancel{10}^{5}\pi}{\cancel{6}_3}\right) + i\sin\left(\frac{\cancel{10}^{5}\pi}{\cancel{6}_3}\right) =$

$= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Scanned with CamScanner

Επομένως οι $6^{ες}$ ρίζες της μονάδος είναι οι:

± 1 , $\pm\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, $\pm\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

όπου το $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$.

Παρατήρηση:

▶ Σχετικά με τις n-οστές ρίζες της μονάδος:

- αν n είναι άρτιος: τότε ρίζες είναι το ± 1 και οι άλλες ρίζες εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών και αντιθέτων.

- αν n είναι περιττός: τότε ρίζες είναι το $+1$ και οι άλλες ρίζες εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών.

▶ Σχετικά με τις n-οστές ρίζες ενός πραγματικού αριθμού:

Γενικά και για οποιοδήποτε $n\in\mathbb{N}$ με $n\geq 1$ οι n-οστές ρίζες ενός οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού $a\in\mathbb{R}$ είναι αλληλοσυζυγείς μιγαδικοί αριθμοί, εμφανίζονται δηλ. σε ζεύγη συζυγών.

Γενίκευση για Ρίζες Μιγαδικού Αριθμού

Θεώρημα:

Οι Ρίζες της εξίσωσης $z^n = a$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

Υποθέτω $a = |a| e^{i\theta}$.

Οι ρίζες του μιγαδικού αριθμού a είναι:

$$\boxed{z_\upsilon = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2\upsilon\pi}{n}\right)}} \quad \upsilon = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $z^3 = i$

$$z^3 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$z_\nu = \underbrace{\sqrt[3]{|i|}}_{1} \cdot e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\nu\pi}{3}\right)} \qquad \nu = 0, 1, 2 \text{ , άρα}$$

Για $\nu=0$: $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Για $\nu=1$: $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi/2+2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Για $\nu=2$: $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi/2+4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{9\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} =$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow z_2 = -i$$

Προσοχή! Δεν έχω ρίζες και τους συζυγείς μιγαδικούς γιατί η πολυωνυμική εξίσωση δεν έχει μόνο πραγματικούς συντελεστές.

Παρατήρηση: Για να εμφανίζονται οι μιγαδικές ρίζες σε ζεύγη συζυγών πρέπει η πολυωνυμική εξίσωση να έχει ΜΟΝΟ πραγματικούς συντελεστές.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ

(1) Απόδειξη τύπου n-οστής ρίζας μιγαδικού

$a = |a| \cdot e^{i\theta}$, θ ένα όρισμα του a.

Εάν $z^n = a$, τότε $z^n = \left(\sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\theta/n}\right)^n$

$$\Rightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\theta/n}}\right)^n = 1 \Rightarrow \frac{z}{\sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\theta/n}} = e^{i\frac{2\nu\pi}{n}}$$

$\nu = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\Rightarrow z = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\frac{2\nu\pi+\theta}{n}}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(2) Εξισώσεις 2ου βαθμού

$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

Εάν $\Delta < 0$, ρίζες: $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$.

Π.χ. $z^2 + z + 1 = 0$. $\Delta = -3$, $z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

(3) Πολυωνυμικές εξισώσεις

$$P(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

$a_j \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$, $k \geq 1$.

<u>Πρόταση:</u> Εάν $P(z_0) = 0$, τότε $P(\overline{z_0}) = 0$.

<u>Απόδ:</u> $P(\overline{z_0}) = \sum_{j=0}^{k} a_j \overline{z_0}^{j} = \overline{\sum_{j=0}^{k} a_j z_0^{j}} =$

$$= \overline{\sum_{j=0}^{k} a_j z_0^{\,j}} = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0. \quad \boxtimes$$

<u>Πόρισμα</u>: Εάν $P(z_0) = 0$, τότε το $(z - z_0)(z - \overline{z_0})$ είναι παράγοντας του P.

Π.χ. Να λυθεί η εξίσωση

$$P(z)=z^4-z^3+2z^2-z+1=0$$

αν μία ρίζα είναι το i.

$(z+i)(z-i)=z^2+1$ παράγοντας του P

$$P(z) \;\big|\; z^2+1$$

$$\pi(z)=z^2-z+1 \rightarrow \text{Ρίζες: } \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

Ρίζες του $P(z)$: $\pm i$, $\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.