ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4
Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

1. Να βρείτε τα
$$\max\{|f(z)| : z \in K\}, \quad \min\{|f(z)| : z \in K\}$$
καθώς και τα σημεία στα οποία τα παραπάνω max, min λαμβάνονται, όπου:
(i) $f(z) = z^2 + 3z - 1, \quad K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.
(ii) $f(z) = e^{z^2}, \quad K$ = το κλειστό και φραγμένο χωρίο που έχει σύνορο το τρίγωνο με κορυφές $0,\ -1,\ 1+i$.

2. Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση f σε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ που περιέχει τον κλειστό δακτύλιο
$$\Delta = \{\ z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 3\},$$
τέτοια ώστε
$$|f(z)| \leq 1, \text{ για } |z| = 1 \quad \text{και} \quad |f(z)| \leq 9, \text{ για } |z| = 3.$$
Να δείξετε ότι $|f(z)| \leq |z|^2, \ \forall \ z \in \Delta$.

3. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, μη σταθερή, τέτοια ώστε $\mathrm{Re}(f(z)) \geq 0, \ \forall\, z \in U$. Να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(f(z)) > 0, \ \forall\, z \in U$.

4. Έστω f ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(z)| \geq 1, \ \forall \ z \in \mathbb{C}$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

5. Έστω $f = u + iv$ ακέραια συνάρτηση με $u^2 \leq v^2$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

6. Έστω f ακέραια συνάρτηση με
$$|f(z)| \ \leq \ Me^{aRe(z)}, \quad \forall \ z \in \mathbb{C},$$
όπου a, M θετικές πραγματικές σταθερές. Να δείξετε ότι
$$f(z) = ce^{az}, \quad \forall \ z \in \mathbb{C},$$
για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{C}$.

7. Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης f γύρω από το σημείο z_0 στον ''δακτύλιο'' Δ, όπου:

   (i) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}\ , \quad z_0 = -2, \quad \Delta = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z+2| < 3\}.$

   (ii) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z}\ , \quad z_0 = 0, \quad \Delta = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

   (iii) $f(z) = \sin\left(\dfrac{z}{1-z}\right)\ , \quad z_0 = 1, \quad \Delta = \mathbb{C} \setminus \{1\}.$

8. Έστω f ολόμορφη και *φραγμένη* στον ''τρυπημένο'' ανοικτό δίσκο $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$. Να δείξετε ότι το z_0 είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο της f. [*Υπόδειξη:* Ολοκλ. τύποι για τους συντελεστές του αναπτύγματος Laurent.]

9. Έστω f ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $D(z_0, r)$ $(z_0 \in \mathbb{C},\ r > 0)$ με

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = 0, \quad f'''(z_0) \neq 0.$$

   (i) Να δείξετε ότι υπάρχει φ ολόμορφη στον $D(z_0, r)$ τέτοια ώστε

$$f(z) = (z - z_0)^3 \varphi(z), \quad \forall\, z \in\ D(z_0, r), \quad \varphi(z_0) \neq 0.$$

   (ii) Εάν z_0 η μοναδική ρίζα της f στον $D(z_0, r)$, να δείξετε ότι

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}\ ,\ z_0\right) = 3.$$

10. (i) Έστω g ολόμορφη σε μια περιοχή του 0 με $g(0) \neq 0$. Να δείξετε ότι

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3 g(z)}\ ,\ 0\right) = \frac{2[g'(0)]^2 - g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3}\ .$$

   (ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 \sin z}\ ,$$

   όπου $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

11. (i) Να προσδιορίσετε ολόμορφη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\sin z = (\pi - z)\varphi(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\pi) = 1, \quad \varphi'(\pi) = 0.$$

(ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{\sin^2 z} dz \ ,$$

όπου $\gamma(t) = 4e^{it}, \ \ t \in [0, 2\pi]$.

12. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma h(z) dz \ ,$$

όπου

$$h(z) = \frac{1}{1 - \cos z} \ + \ \overline{z} z^{12} \cos\left(1/z^3\right), \quad \gamma(t) = e^{it}, \ \ t \in [0, 2\pi].$$

13. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma (1 - z^2) e^{1/z} dz \ ,$$

όπου $\gamma(t) = e^{it}, \ \ t \in [0, 2\pi]$.

14. Με χρήση μιγαδικής ανάλυσης, να δείξετε ότι:

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2 + \cos t} dt = 2\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{a + \cos t} dt = \pi(a - \sqrt{a^2 - 1}), \ \ a > 1$.

15. Με χρήση μιγαδικής ανάλυσης, να δείξετε ότι:

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1 + x^6} dx = \frac{2\pi}{3}$.

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \pi / e$.

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{1 + x^4} dx = -\pi \mathrm{Re}(\ a^2 e^{ia}), \ $ όπου $\ a = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$.