

ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ CAUCHY

ΓΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Πρόταση 1: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$,

$0 < r < R \leq \infty$ και f ολόμορφη στον δίσκο $D(z_0, R)$.

Εάν $|z - z_0| < r$, τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

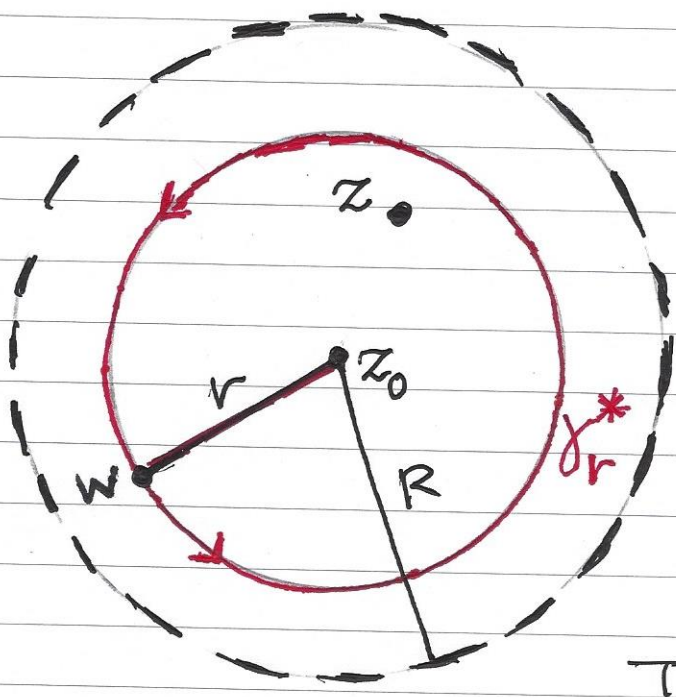
όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Απόδειξη:





$$\gamma_r^* \subset D(z_0, R)$$

$$|z - z_0| < r$$

$$\Rightarrow z \in \text{int} \gamma_r^*$$

Από ολοκληρωτικό

τύπο του Cauchy

παίρνουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r^*} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r^*} \frac{f(w)}{(w-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} dw.$$

$\forall w \in \gamma_r^*$, έχουμε $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$

Γεωμετρ.
 \Rightarrow
 Σειρά

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n}$$

$$\Rightarrow \frac{f(w)}{(w-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n.$$

Αλλά, $\forall w \in \gamma_r^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \right| \leq$$

$$\leq \frac{|f(w)|}{r^{n+1}} |z-z_0|^n$$

$$\leq \frac{M_r}{r} \left| \frac{z-z_0}{r} \right|^n,$$

όπου $M_r = \max_{w \in \gamma_r^*} |f(w)|.$

Όμως, $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z-z_0}{r} \right|^n < \infty,$

αφού $\left| \frac{z-z_0}{r} \right| < 1.$

Από την Πρότ. III.3 του αρχείου

ΣΕΙΡΕΣ-ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΜΙΓΑΔ.

ΑΡΙΘΜ.

(4)

παιρνοντας

$$\int_{\gamma_r} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \right] dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right] (z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right] (z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right] (z-z_0)^n$$

□

Θεώρημα 2 (Taylor)

Έστω $0 < R \leq \infty$ και f ολόμορφη στο δίσκο $D(z_0, R)$ ($z_0 \in \mathbb{C}$).

Τότε, υπάρχουν όλην των τάξεων

οι παράγωγοι $f', f'', \dots, f^{(k)}, \dots, k \in \mathbb{N}_2$

στον $D(z_0, R)$ και

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n,$$

$\forall z \in D(z_0, R)$.

Επιπλέον, αν $0 < r < R$,

$$\gamma_r(t) = z_0 + r e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

τότε

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6

Απόδειξη: Έστω $0 < r < R$

και $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Θέτουμε

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Θα δ.ο.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R).$$

→ Εάν $|z-z_0| < r$, z_0 συμπτέρρασμα
έπεται από την Πρόταση 1.

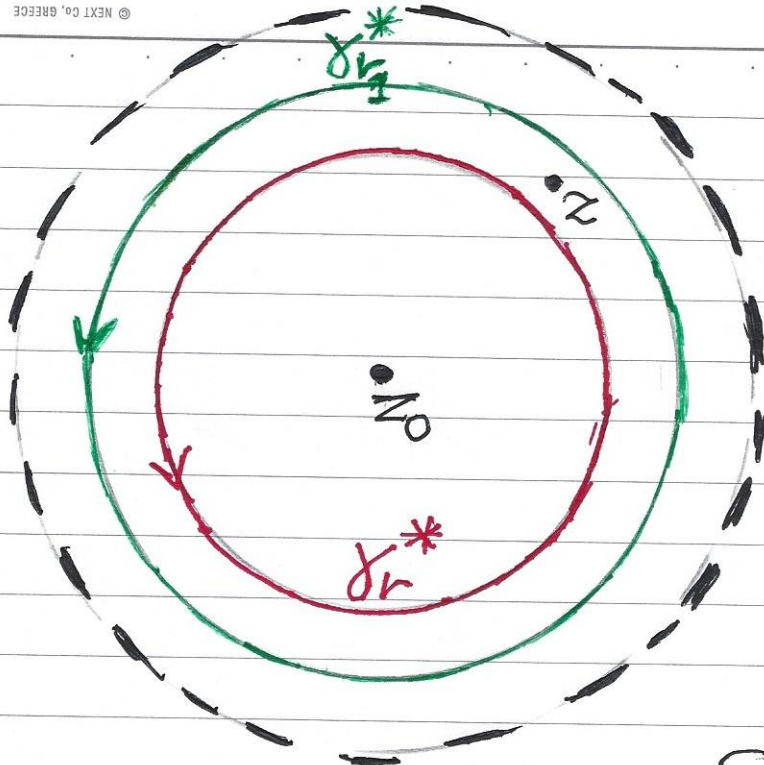
→ Έστω $r \leq |z-z_0| < R$.

Επιλέγουμε $r_1 > 0$ με

$$|z-z_0| < r_1 < R$$

και θέτουμε

$$\gamma_{r_1}(t) = z_0 + r_1 e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$



Λόγω της Πρότ. 1,

λοχύει

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

όπου

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Η συνάρτηση $w \mapsto \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$ είναι

ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των

$\gamma_{r_1}^*$, $\gamma_{r_2}^*$, οπότε από την Αρχή

Παραμόρφωσης παίρνουμε

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

$$\forall z \in D(z_0, R).$$

Από το Πρόγραμμα II.4 του αρχείου

"ΣΕΙΡΕΣ-ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ-ΜΙΓΑΔ. ΑΡΙΘΜ.",

παιρνουμε ότι υπάρχουν όλοι

των τάξεων $\frac{0!}{k!}$ παράγωγοι

$$f^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

στον δίσκο $D(z_0, R)$ και

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

(η)

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw,$$

$k \in \mathbb{N}.$



Πρόταση 3: Εάν f ακέραια,

δηλ. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη, τότε

$\forall z_0, z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n.$$

Απόδειξη: Είναι $\mathbb{C} = D(z_0, R)$ για $R = \infty$.

Το συμπέρασμα έπεται από το Θ. 2. \square

Πρόταση 4: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό $\neq \emptyset$

$f \in \mathcal{H}(U)$. Τότε, υπάρχουν όλη των τάξεων οι παραγώγοι $f^{(n)}, n \in \mathbb{N}$

και είναι όλες ολόμορφες στο U .

Απόδειξη:

Ισχυρισμός: $\forall g \in \mathcal{H}(U)$, ισχύει $g' \in \mathcal{H}(U)$.

[Πράγματι: Έστω $z_0 \in U \Rightarrow \exists R \in (0, \infty)$]

$$D(z_0, R) \subset U$$

$\xrightarrow{\text{Θ. 2}}$

$\exists \eta$ g'' στον $D(z_0, R)$

\Rightarrow

g' διαφορίσιμη στο z_0 .]

(10)

Τώρα, λόγω του λοχυρισμού παίρνουμε
 $f' \in H(U)$ (λοχυρισμός) \Rightarrow

$$\Rightarrow f'' \in H(U)$$

$$\stackrel{\text{λοχυρ.}}{\Rightarrow} f''' \in H(U)$$

κ-ο-κ.



Πρόταση 5 (ολοκλ. τύποι Cauchy για παραγωγούς):

Έστω $\gamma \in \mathcal{C}_+$ με απλά συνεκτικό

εσωτερικό $U = \text{int} \gamma^*$ ή

$$f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

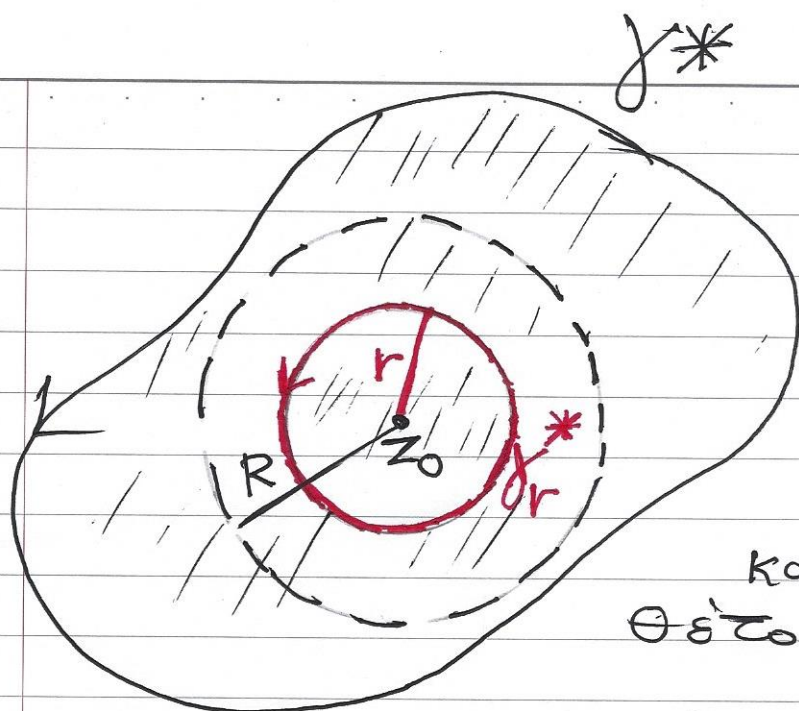
με $f|_U \in H(U)$, $f|_{\gamma^*}$ συνεχής.

Εάν $z_0 \in U$, τότε

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη:





Επιλέγουμε

$$R \in (0, \infty) \mid$$

$$D(z_0, R) \subset U$$

και $r \in (0, R)$.

Θετούμε

$$\gamma_r(t) = z_0 + r e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Λόγω του Θ.2, f ολ παραγωγολ

όλων των τάξεων στον $D(z_0, R)$

και ισχύει

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αλλά, η συνάρτηση

$$w \mapsto \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$$

είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των

γ^* , γ_r^*

Αρχή Παρατήρηση.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

Σειρές Taylor γύρω από το $z_0=0$
Βασικών συναρτήσεων

I. $f(z) = e^z, z \in \mathbb{C}$. Η f είναι

ομομορφή σε όλο το $\mathbb{C} \xrightarrow{\Theta-2}$
 (Θ. Taylor)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$\Rightarrow \boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.}$$

II. $f(z) = \sin z, z \in \mathbb{C}$.

$\forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) =$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n!} i^n z^n$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!} i^{2n+1} z^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{i} i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, z \in \mathbb{C}.}$$

III. $f(z) = \cos z, z \in \mathbb{C}.$

$\forall z \in \mathbb{C},$

$$\cos z = (\sin z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z^{2n+1})' =$$

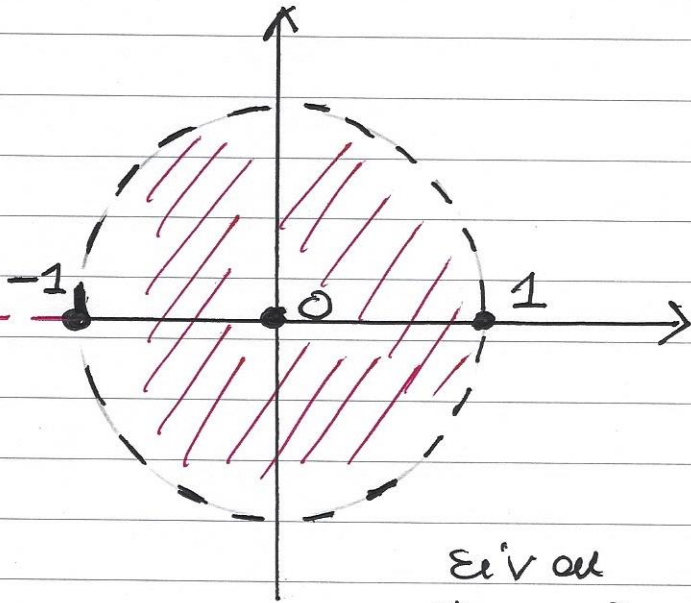
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2n+1) z^{2n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, z \in \mathbb{C}.}$$

IV. $f(z) = \text{Log}(1+z), \quad z \neq -1.$

Η f είναι ολόμορφη στο πεδίο

$U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1].$



Ο μεγαλύτερος

ανοικτός δίσκος
κέντρου 0

που περιέχεται
στο U

είναι $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$

Επομένως, ο $D(0,1)$ είναι ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος πάνω στον οποίο η f έχει ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0.

$\forall z \in D(0,1), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$

$$\forall z \in D(0,1), \quad f'(z) = \frac{1}{1+z},$$

$$f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2},$$

$$f'''(z) = \frac{1 \cdot 2}{(1+z)^3},$$

$$f^{(4)}(z) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+z)^4}$$

κ-ο-κ.

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι

$$\forall n \geq 1, \quad f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+z)^n}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Εφ' όσον $f(0) = 0$, παίρνουμε

$$\boxed{\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad |z| < 1.}$$

Άσκησης:

(1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_R} \frac{\bar{z} e^z}{z} dz, \text{ όπου } \gamma_R(t) = R e^{it},$$

$$t \in [0, 2\pi] \quad (R > 0).$$

Λύση: $\forall z \in \gamma_R^*, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = R^2$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{R^2}{z}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} \frac{\bar{z} e^z}{z} dz = R^2 \int_{\gamma_R} \frac{e^z}{z^2} dz =$$

$$= R^2 \cdot 2\pi i (e^z)' \Big|_{z=0} = 2\pi i R^2.$$



(2) Να υπολογίσετε το $\int_{\gamma} f(z) dz,$

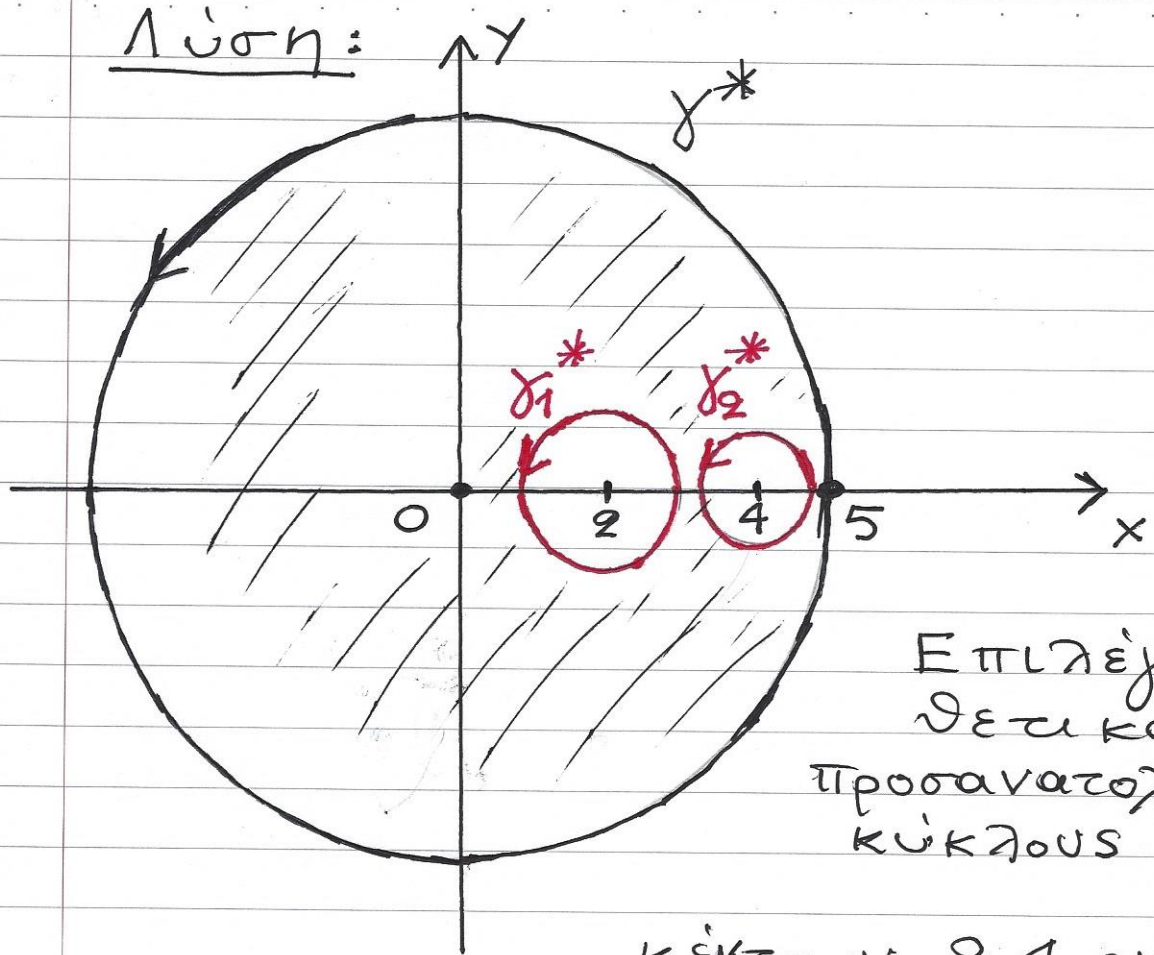
όπου

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2(z-4)}$$

και

$$\gamma(t) = 5 e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Λύση:



Επιλέγουμε
 δευτικά
 προσανατολισμένους
 κύκλους γ_1, γ_2

κέντρων 2, 4 αντίστοιχα

ώστε

$$\gamma_1^* \cap \gamma_2^* = \emptyset, \quad \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \subset \text{int} \gamma^*$$

Η f είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$

Αρχή
 Παράμ. \rightarrow

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Έχουμε

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\sinh(\pi z)}{z-4}}{(z-2)^2} dz =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\sin(\pi z)}{z-4} \right]' \Big|_{z=2}$$

$$= 2\pi i \frac{\pi \cos(\pi z)(z-4) - \sin(\pi z)}{(z-4)^2} \Big|_{z=2}$$

$$= 2\pi i \frac{\pi \cos(2\pi)(-2) - \sin(2\pi)}{(-2)^2}$$

$$= 2\pi i \frac{(-2\pi)}{4} = -\pi^2 i,$$

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2}}{z-4} dz =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2} \right] \Big|_{z=4}$$

$$= 2\pi i \frac{0}{4} = 0.$$

$$\text{Άρα, } \int_{\gamma} f(z) dz = -\pi^2 i + 0 = -\pi^2 i.$$

(3) Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη με

$$|f(z)| \leq a|z| + b, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

όπου $a, b > 0$.

Να δείξετε ότι:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall R > 0,$

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \frac{aR + b}{R^n}$$

(ii) $\exists A, B \in \mathbb{C}$ ώστε

$$f(z) = Az + B, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |A| \leq a, \quad |B| \leq b.$$

Λύση:

(i) Έστω $n \in \mathbb{N}, R > 0, \gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

Τότε,

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Αλλά, $\forall z \in \gamma_R^*$,

$$\left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{a|z| + b}{R^{n+1}} = \frac{aR + b}{R^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow[\text{ανλο.}]{ML} \quad |f^{(n)}(0)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \cancel{2\pi R} \frac{aR+b}{R^{n+1}} \\ &= n! \frac{aR+b}{R^n}. \end{aligned}$$

(ii) Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Τότε,

$$\forall R > 0, \quad |f^{(n)}(0)| \stackrel{(i)}{\leq} n! \frac{aR+b}{R^n}$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

Επειδή f εξόμοιωτη σε όλο το \mathbb{C} ,

το Θ -Taylor δίνει ότι $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$= f(0) + f'(0)z.$$

$$\forall R > 0, \quad |f(0)| \stackrel{(i)}{\leq} aR+b \xrightarrow{R \rightarrow 0^+} b$$

$$\text{οπότε} \quad \underline{|f(0)| \leq b.}$$

Επιπλέον, $\forall R > 0$,

$$|f'(z)| \leq \frac{aR+b}{R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} a$$

οπότε $|f'(z)| \leq a$.

Θέτουμε $A = f'(z)$, $B = f(z)$.

(4) Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση

$f: D(0,1) \rightarrow D(0,1)$, όπου
 $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Να δείξετε ότι

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}, \quad |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2},$$

$\forall z \in D(0,1)$.

Λύση: Έστω $z \in D(0,1)$. Επιλέγουμε

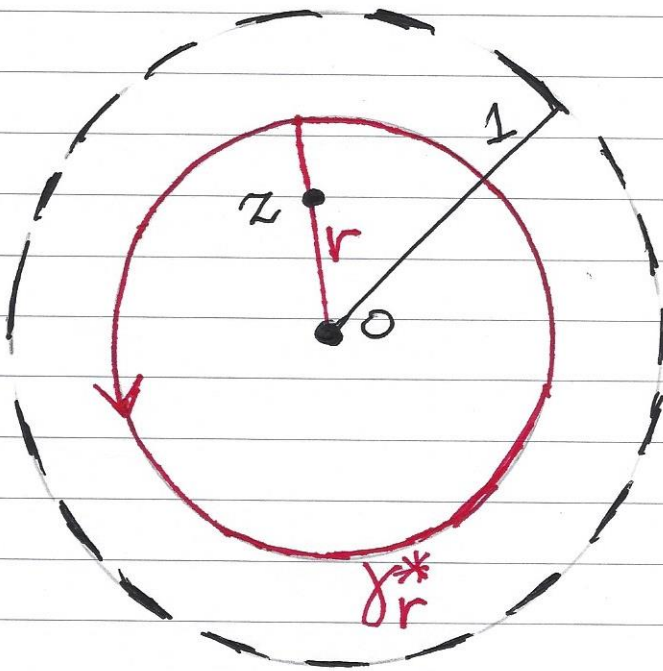
$r > 0$ με $|z| < r < 1$ κ' θέτουμε

$$\gamma_r(t) = re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Τότε, $z \in \text{int} \gamma_r^*$ και

$$\gamma_r^* \subset D(0,1).$$

Από τους ολοκ. τύπους Cauchy παίρνουμε



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

$$\forall w \in \gamma_r^*, |f(w)| < 1 \text{ και}$$

$$|w-z| \geq |w| - |z| = r - |z|$$

$$\Rightarrow \left\{ \left| \frac{f(w)}{w-z} \right| < \frac{1}{r-|z|} \right\}$$

$$\left\{ \left| \frac{f(w)}{(w-z)^2} \right| \leq \frac{1}{(r-|z|)^2} \right\}$$

ML-ανω.


$$\Rightarrow \left\{ |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{r-|z|} = \frac{r}{r-|z|} \right\}$$

$$\left\{ |f'(z)| \leq \frac{r}{(r-|z|)^2} \right\}$$

93

Οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν $\forall r > 0$ με $|z| < r < 1$.

Παίρνοντας το όριο καθώς $r \rightarrow 1$, προκύπτει ότι

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}, \quad |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}$$


(5) Να βρείτε τη σειρά Taylor

της συνάρτησης $f(z) = \frac{z^2+z}{(z-1)^2}$, γύρω από το σημείο $z_0 = -1$.

Λύση: Θέτω $w = z - z_0 = z + 1$

$\Rightarrow z = w - 1$, οπότε

$$f(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2} = \frac{(w-1)w}{(w-2)^2}$$

$$= \frac{w^2 - w}{w^2 - 4w + 4} =$$

$$= \frac{w^2 - 4w + 4 + 3w - 4}{w^2 - 4w + 4}$$

$$= 1 + \frac{3w-4}{(w-2)^2} = 1 + \frac{3(w-2)+2}{(w-2)^2}$$

$$= 1 + \frac{3}{w-2} + \frac{2}{(w-2)^2}$$

Έχουμε

$$\frac{1}{w-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{w}{2}} \quad \text{για } \left|\frac{w}{2}\right| < 1$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(w-2)^2} = -\left(\frac{1}{w-2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n w^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$\text{για } \left|\frac{w}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+1| < 2,$$

οπότε

$$f(z) = 1 - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$= 1 - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+1)^{n-1}}{2^n}$$

$$= 1 - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-2)(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{2^{n+1}} (z+1)^n,$$

για $|z+1| < 2$.



(6) Να δείξετε ότι $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}.$$

Λύση: $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |e^z - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} =$$

$$= |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+1)!} \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| e^{|z|}$$

Άρα, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}$$

(7) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{n \cdot 3^n}$$

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{n \cdot 3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (i-2)^n}{n \cdot 3^n} = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (i-2)^n}{n \cdot 3^n} \end{aligned}$$

Είναι $|i-2|^2 = 1 + 4 = 5 < 9$

$$\Rightarrow \left| \frac{i-2}{3} \right| < 1, \text{ οπότε}$$

το παραπάνω άθροισμα ισούται με

$$-\operatorname{Log}\left(1 + \frac{i-2}{3}\right) = -\operatorname{Log}\left(\frac{i+1}{3}\right)$$

$$= -\operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{2}}{3} e^{i\pi/4}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) - i\frac{\pi}{4}.$$



(8) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n \cos(n\theta), \text{ για } 0 < r < 1, \theta \in \mathbb{R}.$$

Λύση: Για $|z| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} (z^n)' =$$

$$= z \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \right)' = z \left(\frac{1}{1-z} - 1 \right)'$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2}. \text{ Για } z = r e^{i\theta},$$

έχουμε $|z| = r < 1$, οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n e^{in\theta} = \frac{r e^{i\theta}}{(1 - r e^{i\theta})^2} =$$

$$= \frac{re^{i\theta} (1-re^{i\theta})^2}{|1-re^{i\theta}|^4}$$

$$= \frac{r}{|1-re^{i\theta}|^4} e^{i\theta} (1+r^2 e^{-2i\theta} - 2r e^{-i\theta})$$

$$= \frac{r}{|1-re^{i\theta}|^4} (e^{i\theta} + r^2 e^{-i\theta} - 2r)$$

$$= \frac{r}{|1-re^{i\theta}|^4} \left[(1+r^2) \cos\theta - 2r + i(1-r^2) \sin\theta \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nr^n \cos(n\theta) =$$

$$= \frac{r [(1+r^2) \cos\theta - 2r]}{|1-re^{i\theta}|^4}$$

$$= \frac{r [(1+r^2) \cos\theta - 2r]}{[(1-r \cos\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta]^2}$$