

ΣΥΝΕΤΙΕΙΕΣ Θ. CAUCHY-GOURSAT

Θ. 1. (Αρχή Παραμόρφωσης)

Έστω γ_1, γ_2 θετικά προσανατολισμένες, ^{απλές} κλειστές, τμηματικά λείες καμπύλες

$$\gamma_2^* \subset \text{int} \gamma_1^*$$

και $G = \text{int} \gamma_1^* \cap \text{ext} \gamma_2^*$
το πεδίο μεταξύ των γ_1^*, γ_2^* .

Έστω $f: G \cup \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \rightarrow \mathbb{C}$, ώστε:

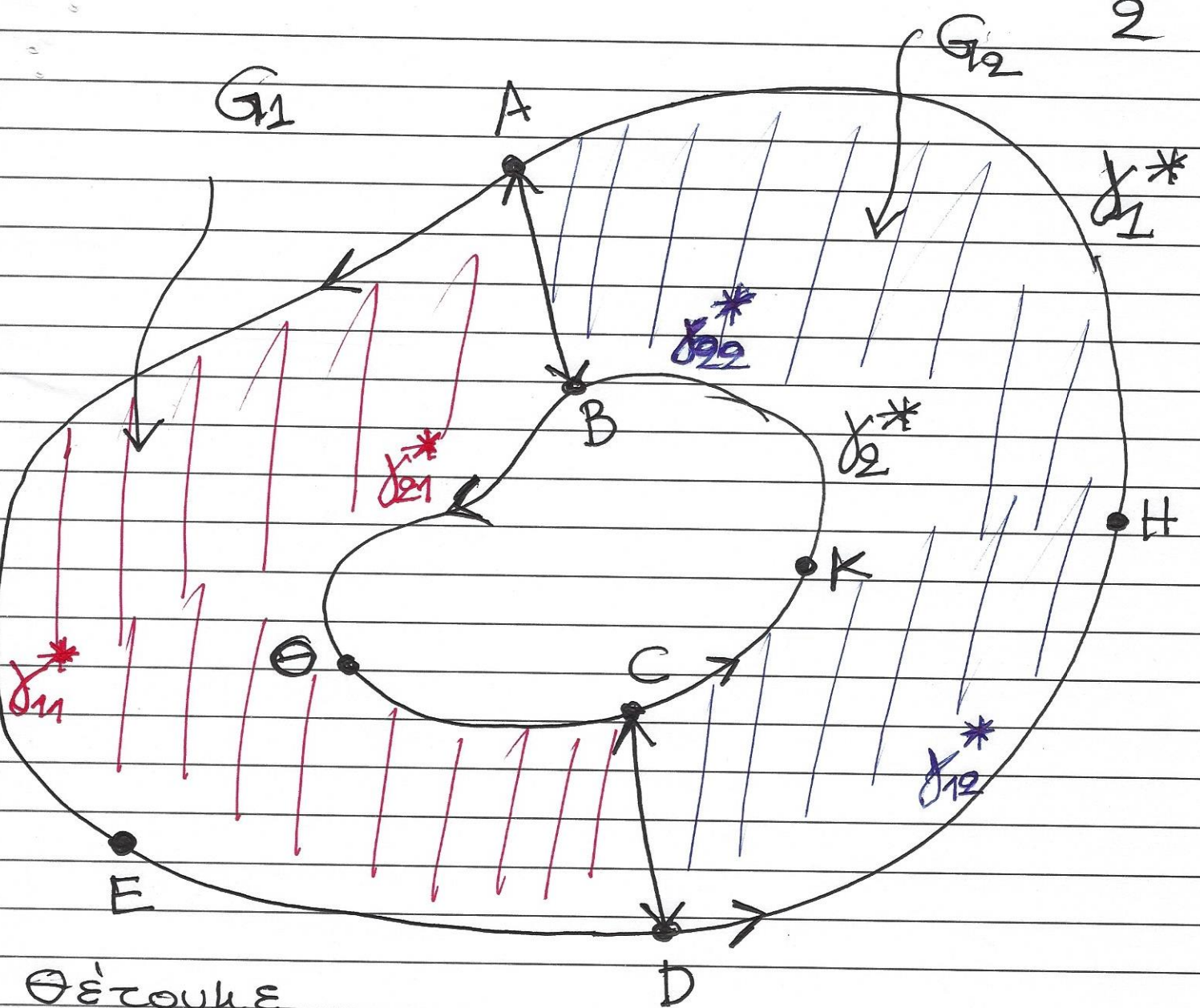
- f ολόμορφη στο G
- f συνεχής στο $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$

Τότε,

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Απόδειξη:





Θέτουμε

$$\gamma_{11} = A \xrightarrow{\gamma_1} E \xrightarrow{\gamma_1} D, \quad \gamma_{12} = D \xrightarrow{\gamma_1} H \xrightarrow{\gamma_1} A,$$

$$\gamma_{21} = B \xrightarrow{\gamma_2} \Theta \xrightarrow{\gamma_2} C, \quad \gamma_{22} = C \xrightarrow{\gamma_2} K \xrightarrow{\gamma_2} B.$$

Τότε,

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + \gamma_{12}, \quad \gamma_2 = \gamma_{21} + \gamma_{22}.$$

Θέτουμε

$$\Gamma_1 = \gamma_{11} + \vec{DC} - \gamma_{21} + \vec{BA}, \quad \Gamma_2 = \gamma_{12} + \vec{AB} - \gamma_{22} + \vec{CD}.$$

Τα $G_1 = \text{int} \Gamma_1$, $G_2 = \text{int} \Gamma_2$ είναι
απλά ως
συνεκτικά πεδία.

Εφαρμόζοντας το θ. Cauchy-Goursat
(ισχυρή εκδοχή) για τις καμπύλες
 Γ_1, Γ_2 παίρνουμε

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \int_{\gamma_{11}} f + \int_{\vec{DC}} f + \int_{-\gamma_{21}} f + \int_{\vec{BA}} f. (1) \\ 0 = \int_{\gamma_{12}} f + \int_{\vec{AB}} f + \int_{-\gamma_{22}} f + \int_{\vec{CD}} f. (2) \end{cases}$$

Είναι $\gamma_{11} + \gamma_{12} = \gamma_1$,

$$(-\gamma_{21}) + (-\gamma_{22}) = -\gamma_2,$$

$$0 = \int_{\vec{DC}} f + \int_{\vec{CD}} f = \int_{\vec{BA}} f + \int_{\vec{AB}} f.$$

$$(1) + (2) \Rightarrow$$

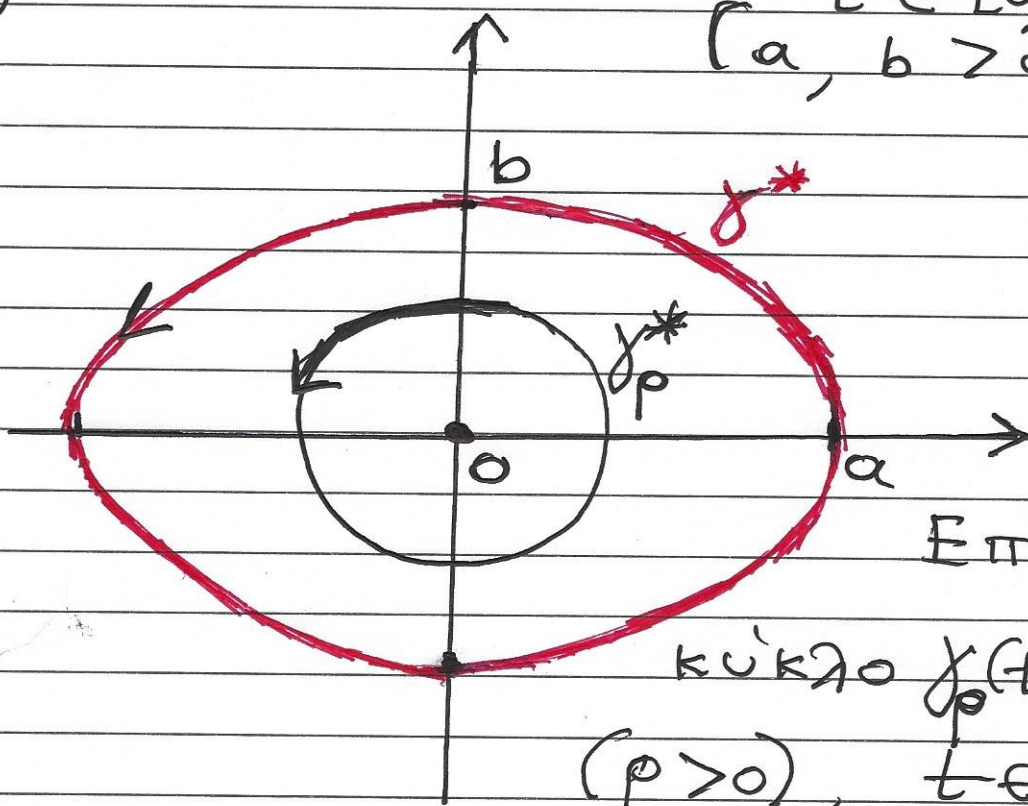
$$0 = \int_{\gamma_1} f + \int_{-\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f. \quad \square$$

Εφαρμογή:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = ?, \quad \gamma(t) = a \cos t + i(b \sin t),$$

$$t \in [0, 2\pi] \\ (a, b > 0).$$



Επιλέγουμε

$$\text{κύκλο } \gamma_{\rho}(t) = \rho e^{it}$$

$$(\rho > 0), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\mu\epsilon \quad \gamma_{\rho}^* \subset \text{int} \gamma^*.$$

Η $f(z) = 1/z$ είναι ολόμορφη στο

πεδίο που βρίσκεται μεταξύ των

γ^* , γ_p^* & συνεχής στο $\gamma^* \cup \gamma_p^*$.

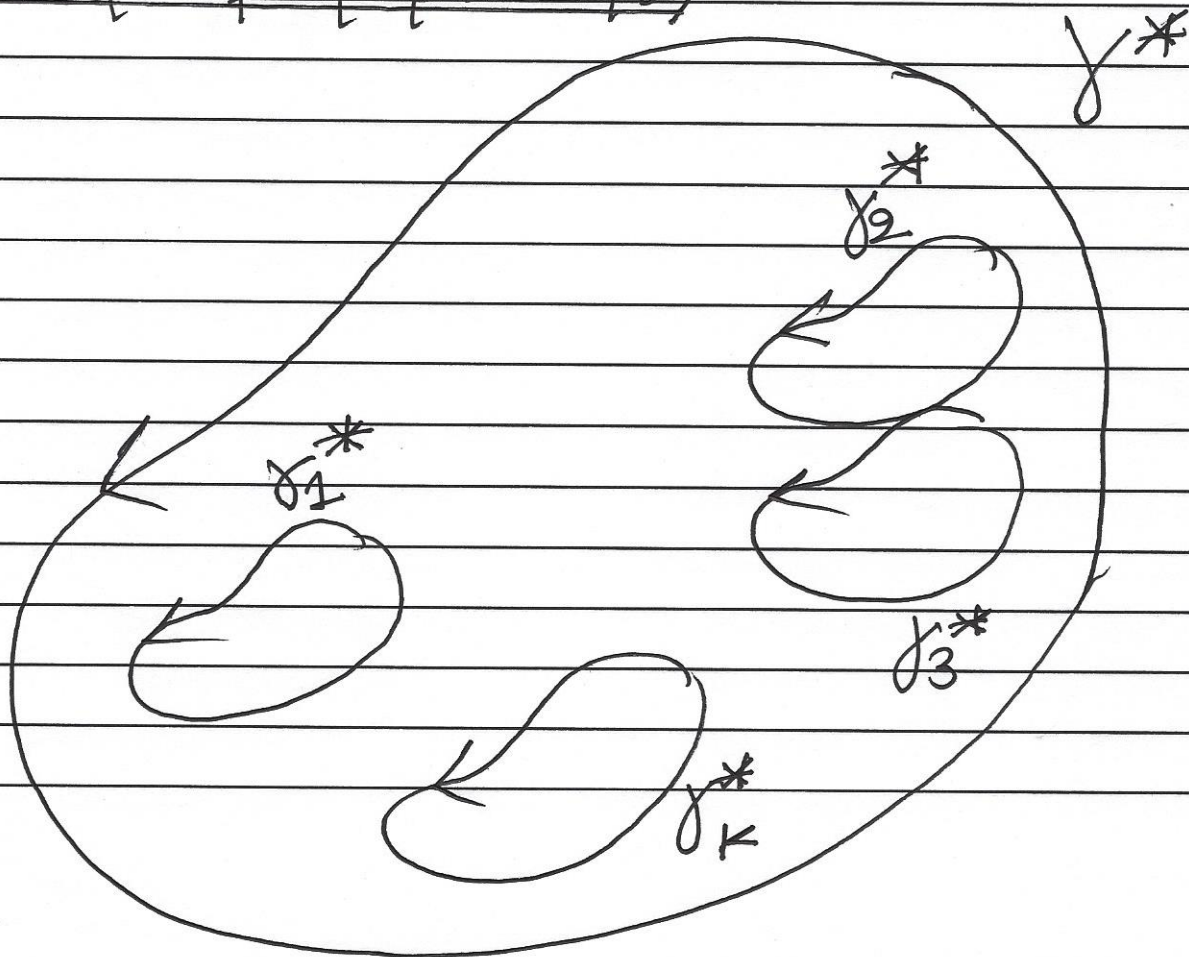
Αρχή Παραμόρφωσης \Rightarrow

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_p} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}} d\theta$$

$$= 2\pi i.$$

Θ. 2. (Γενικευμένη Αρχή

Παραμόρφωσης)



Εστω $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ ($k \geq 1$)

θετικά προσανατολισμένες,
απλές, κλειστές, τμηματικά λείες
καμπύλες, ώστε

- $\text{int} \gamma^* \supset \gamma_j^*, 1 \leq j \leq k$
- $\text{int} \gamma_i^* \cap \text{int} \gamma_j^* = \emptyset,$
 $\forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq k.$

Θεωρούμε συνάρτηση f που είναι

→ συνεχής στο $\gamma^* \cup \left(\bigcup_{j=1}^k \gamma_j^* \right)$

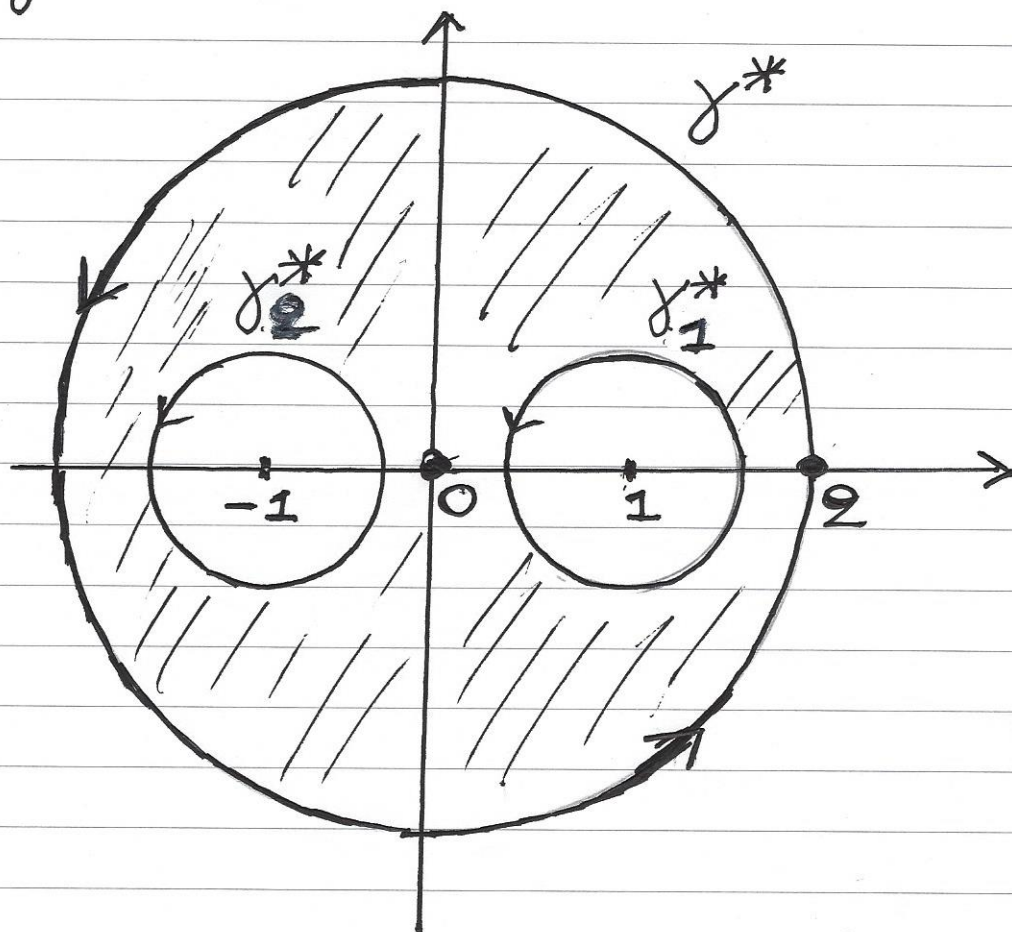
→ ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ
των $\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_k^*.$

Τότε,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

Εφαρμογή:

$$\int \frac{dz}{z^2-1} = ?, \quad \gamma(t) = ze^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$



Θεωρούμε δύο κύκλους γ_1, γ_2 με κέντρα $1, -1$ αντίστοιχα ώστε

$$\gamma_1^* \cap \gamma_2^* = \emptyset, \quad \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \subset \text{int} \gamma^*.$$

Η $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ είναι ολόμορφη στο

πεδίο μεταξύ των $\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$ και

συνεχής στο $\gamma^* \cup \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$.

Γενικευμένη Αρχή Παραμόρφωσης \Rightarrow

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Έχουμε $f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$,

οπότε

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z+1},$$

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \frac{1}{2} \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2} \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z+1}.$$

Οι συναρτήσεις $z \mapsto \frac{1}{z+1}$, $z \mapsto \frac{1}{z-1}$

είναι ολόμορφες στα $\text{int} \gamma_1^*$, $\text{int} \gamma_2^*$

αντίστοιχα $\xrightarrow{\text{Cauchy}}$

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z+1} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z+1} = 0,$$

ενώ $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \pi i - \pi i = 0.$$

Συμβολισμός:

$\mathcal{C} = \{\gamma \mid \gamma \text{ απλή, κλειστή, τμ. λεία καμπύλη}\}$

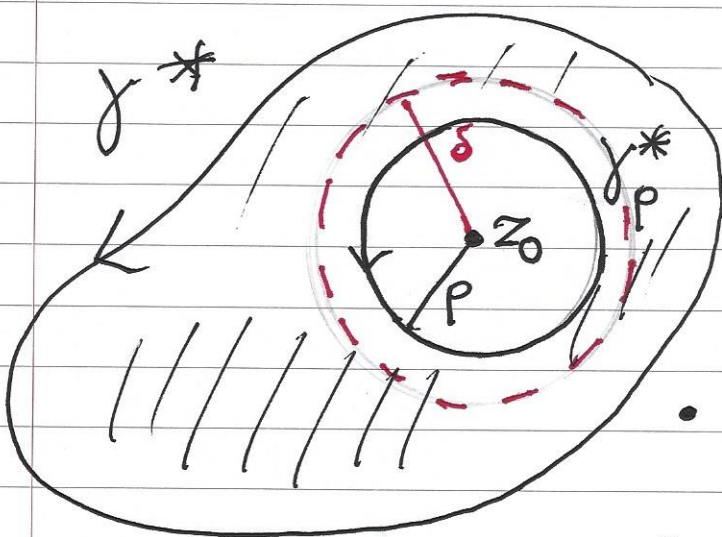
$\mathcal{C}^+ = \{\gamma \in \mathcal{C} \mid \gamma \text{ δευκρά προσανατολισμένη}\}$

Θ.3 (ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)

Έστω $\gamma \in \mathcal{C}^+$ με απλή συνεκτικό
εσωτερικό $\text{int} \gamma^* = U$, $f \in \mathcal{H}(U)$ &
 f συνεχής στο γ^* . Εάν $z_0 \in U$,

τότε
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

Απόδειξη:



Έστω $\varepsilon > 0$.
Επειδή f συνεχής
στο $z_0 \in U$,
 $\exists \delta > 0$

- $D(z_0, \delta) \subset U$

- $\forall z \in D(z_0, \delta),$

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon / 2\pi$$

(3)

Επιλέγουμε $\rho \in (0, \delta)$ ώστε

$$\gamma_\rho^* \subset U, \text{ όπου } \gamma_\rho^* = z_0 + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi].$$

Η συνάρτηση $z \mapsto \frac{f(z)}{z-z_0}$ είναι

ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των

$$\gamma^*, \gamma_\rho^* \xrightarrow[\text{Παρακίερα.}]{\text{Αρχή}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz =$$

$$= \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz +$$

$$+ f(z_0) \int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z-z_0} = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz +$$

$$+ 2\pi i f(z_0)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i f(z_0) = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \quad (4)$$

$$\forall z \in \gamma_\rho^*, |z-z_0| = \rho < \delta \stackrel{(3)}{\Rightarrow} |f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho}$$

ML-αντο. $\Rightarrow \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq 2\pi\rho \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} = \varepsilon$

(4) $\Rightarrow \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| \leq \varepsilon.$

Η τελευταία ισχύει $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \cdot \square$

Χαρακτηριστικές ασκήσεις

(1) $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz = ?$, $\gamma(t) = ze^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Λύση: Θεωρούμε κύκλους $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^+$

κέντρων $1, -1$ αντιστοίχα με

$\gamma_1^*, \gamma_2^* \subset \text{int} \gamma^*$, $\gamma_1^* \cap \gamma_2^* = \emptyset.$

(βλ-σχήμα σελ. 7).

Η συνάρτηση $z \mapsto f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 1}$

είναι ομομορφή στο πεδίο μεταξύ των

$$\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$$

Γενίκευση.

Αρχή Πόλαρ.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Έχουμε

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z+1)(z-1)} dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z-1} dz$$

Ολοκλ.

$$\text{---} \quad 2\pi i \frac{e^z}{z+1} \Big|_{z=1} = \pi i e.$$

Cauchy

Σημ. ότι $-1 \notin \text{int} \gamma_1^*$, οπότε

η $z \mapsto \frac{e^z}{z+1}$ είναι ομομορφή

στο $\text{int} \gamma_1^*$.

Επιπλέον, $1 \in \text{int} \gamma_1^*$.

$$\bullet \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z-1} dz =$$

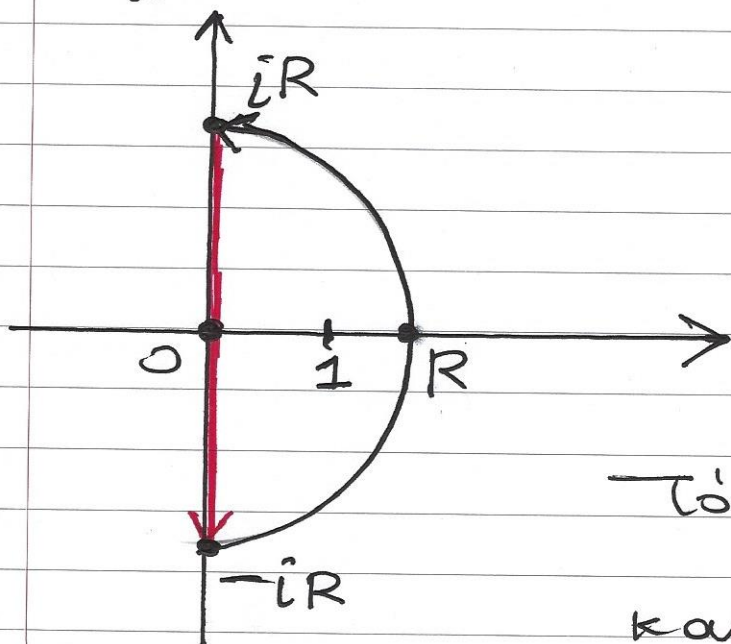
$$\text{O.T.} \\ \text{Cauchy} \quad 2\pi i \frac{e^z}{z-1} \Big|_{z=-1} = -\pi i/e.$$

Σημ. όα $1 \notin \text{int} \gamma_2^*$, οπότε η

$z \mapsto \frac{e^z}{z-1}$ είναι ομομορφη στο

$\text{int} \gamma_2^*$. Επιπλέον, $-1 \in \text{int} \gamma_2^*$.

$$(2) \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = ?, \quad \gamma_R(t) = R e^{it} \quad (R > 1), \\ t \in [-\pi/2, \pi/2]$$



Λύση
Θεωρούμε την καμπύλη

$$\Gamma_R = \gamma_R + [iR, -iR].$$

Τότε, $\Gamma_R \in \mathcal{C}^+$

και $1 \in \text{int} \Gamma_R^*$.

Η συνάρτηση $z \mapsto \frac{1}{z+1}$ είναι

αόμορφη στο $\text{int} \Gamma_R^*$ $\xrightarrow{\text{O.T.}}$ Cauchy

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z+1} dz = 2\pi i \frac{1}{z+1} \Big|_{z=1} = \pi i$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = \pi i.$$

Λαμβάνοντας,

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} + \int_{[iR, -iR]} \frac{dz}{z^2-1}$$

$$\Rightarrow \pi i = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} - \int_{[-iR, iR]} \frac{dz}{z^2-1}.$$

$$\text{Άρα, } \int_{[-iR, iR]} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{-R}^R \frac{d(it)}{(it)^2-1} =$$

$$= -i \int_{-R}^R \frac{dt}{t^2+1} = -2i \text{Arctan } R$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = \pi i - 2i \operatorname{Arctan} R.$$

(3) (a) Να δείξετε ότι

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

(β) Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt.$$

Λύση:

Έστω $R > 1$.

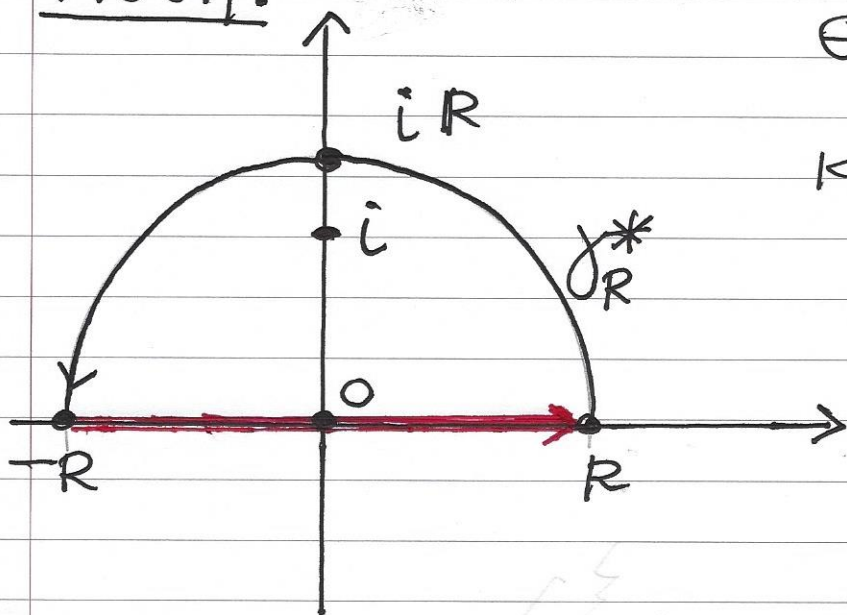
Θεωρούμε την
καμπύλη

$$\Gamma_R = \gamma_R + [-R, R].$$

Τότε,

$$\Gamma_R \in \mathcal{C}^+$$
 και

$$i \in \operatorname{int} \Gamma_R$$



$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{O.T. Cauchy}} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz &= \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z+i} dz \\ &= 2\pi i \frac{e^{iz}}{z+i} \Big|_{z=i} = \pi/e. \end{aligned}$$

Ταυτόχρονα,

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz + \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{1+t^2} dt \quad (5)$$

Αλλά, $\forall z \in \gamma_R^*$ με $z = x+iy$, έχουμε

$$y \geq 0 \Rightarrow iz = -y + ix$$

$$\Rightarrow |e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{e^{iz}}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{|1+z^2|}$$

$$\text{και } |z^2+1| \geq |z|^2-1 = R^2-1$$

$$\Rightarrow (R > 1) \left| \frac{e^{iz}}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2-1}$$

ML-ανω. $\Rightarrow \left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right| \leq \pi R \frac{1}{R^2-1}$
 $R \rightarrow +\infty \rightarrow 0.$

Παίρνοντας z_0 όποια καδώς $R \rightarrow +\infty$
 συνν(5) κ' επιελδιή $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \pi/e,$

παίρνουμε

$$\pi/e = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{1+t^2} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt = \pi/e.$$

(4) $\int_{\gamma} \bar{z} \cos z dz = ?$, $f(t) = e^{it}$,
 $t \in [0, 2\pi]$

Λύση: $\forall z \in \gamma^*$, $|z|=1 \Rightarrow \bar{z} = 1/z$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \bar{z} \cos z dz = \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz \stackrel{\text{o.T. Cauchy}}{=} \\ = 2\pi i \cos z \Big|_{z=0} = 2\pi i$$

(5) Έστω $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

και $f \in \mathcal{H}(U)$, όπου $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό

με $\gamma^* \subset U$. Να δείξετε ότι

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} \overline{f(z)} dz = 2\pi i \overline{f(0)}.$$

Λύση:
$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} \overline{f(z)} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \overline{f(e^{it})} i e^{it} dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})} dt = i \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})} dt.$$

Αλλά,
$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt = \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{it}} i e^{it} dt$$

$$= \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz \quad \text{o.T. Cauchy}$$

$$= \frac{1}{i} 2\pi i \overbrace{f(0)} = 2\pi f(0)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{1}{z} \overline{f(z)} dz = 2\pi i \overline{f(0)}.$$

(6) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με

$$D[0, 2] = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\} \subseteq U$$

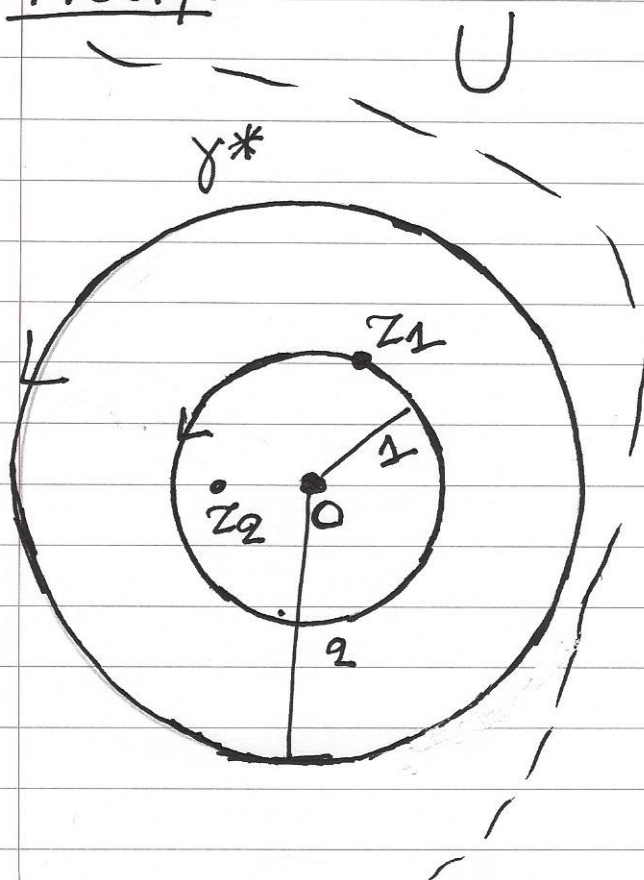
και $f \in H(U)$, τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq 1, \text{ για } |z| = 2.$$

Να δείξετε ότι $\forall z_1, z_2 \in D[0, 1]$,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq 2|z_1 - z_2|.$$

Λύση:



Έστω $\gamma(t) = 2e^{it}$,
 $t \in [0, 2\pi]$,

$$z_1, z_2 \in D[0, 1].$$

Τότε, $z_1, z_2 \in \text{int} \gamma^*$.

ο.τ.

\implies
Cauchy

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_1} dz$$

$$f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_2} dz$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f(z_1) - f(z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2} \right) dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \frac{z-z_2 - z+z_1}{(z-z_1)(z-z_2)} dz \\
 &= \frac{z_1-z_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz
 \end{aligned}$$

Αλλά, $\forall z \in \gamma^*$, $|z|=2 \Rightarrow$ (υπόθεση)

$$\Rightarrow |f(z)| \leq 1 \quad \text{και}$$

$$|z-z_1| \geq |z|-|z_1| = 2-|z_1| \geq 1,$$

$$|z-z_2| \geq \dots \geq 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} \right| \leq \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

(ML-ανώ.) $\Rightarrow \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz \right| \leq 4\pi$

κατά