

I. Σειρές μιγαδικών αριθμών

Ορισμός I.1. Για κάθε ακολουθία

$(z_n) \subset \mathbb{C}$, θεωρούμε την παράσταση

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad \text{ή} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

και την ονομάζουμε σειρά με γενικό όρο (z_n) .

Η ακολουθία (S_n) με $S_n = \sum_{k=1}^n z_k, n \geq 1$

λέγεται ακολουθία μερικών αθροισμάτων

της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Ορισμός I.2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει

ανν $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L \in \mathbb{C}$.

Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = L.$$

Παράδειγμα (Γεωμετρική σειρά):

$$\text{Για } |z| < 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = 1 + z + z^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{1-z}$$

Πράγματι $\forall n \geq 1, \forall z \in \mathbb{C}$ με $|z| < 1,$

$$\left| \sum_{k=1}^n z^{k-1} - \frac{1}{1-z} \right| =$$

$$= \left| 1 + z + \dots + z^{n-1} - \frac{1}{1-z} \right|$$

$$= \left| \frac{1-z^n}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right| = \frac{|z|^n}{|1-z|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Πρόταση I.3. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \sum_{n=1}^{\infty} w_n$
συγκλίνουσες σειρές και $\lambda \in \mathbb{C}.$

Τότε, οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n)$$

συγκλίνουν και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n}$ συγκλίνει

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} z_n}$$

Πρόταση I.4. (Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης)

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ συγκλίνει,

τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

συγκλίνει και ισχύει

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

Πρόταση I.5. (Κριτήριο του λόγου)

Έστω $(z_n) \subset \mathbb{C}$, με $z_n \neq 0, \forall n \geq 1$.

- Εάν $\limsup_n \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει (απόλυτα).

• Εάν $\liminf_n \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.

• Εάν $\liminf_n \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq 1 \leq \limsup_n \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$,

το κριτήριο δεν αποφαινεται.

Παράδειγμα

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ συγκλίνει
απόλυτα, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Πράγματι, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1.$$

Πρόταση I.5. (Κριτήριο Ρίτας)

- Εάν $\limsup_n \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απόλυτα.
- Εάν $\liminf_n \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.
- Εάν $\liminf_n \sqrt[n]{|z_n|} \leq 1 \leq \limsup_n \sqrt[n]{|z_n|}$, το κριτήριο δεν αποφαίνεται.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

$$\sqrt[n]{\left| \frac{z^n}{n^2} \right|} = \frac{|z|}{(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow |z|.$$

Εάν $|z| < 1$ (αντ. $|z| > 1$), η σειρά συγκλίνει (αντ. αποκλίνει).

Για $|z| = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Συνοψίζοντας, η σειρά

- συγκλίνει, για $|z| \leq 1$.
- αποκλίνει, για $|z| > 1$.

Πρόταση I.6: Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει, τότε $z_n \xrightarrow{n} 0$.



II. Δυναμοσειρές

Ορισμός II.1: Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$,

$z_0 \in \mathbb{C}$. Δυναμοσειρά με κέντρο z_0 ή

συντελεστές $a_n, n \in \mathbb{N}$, είναι η σειρά

$$a_0 + a_1(z - z_0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (1)$$

Θέτουμε $L = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$.

Η ακτίνα σύγκλισης της (1) ορίζεται ως:

$$R = \begin{cases} 1/L, & \text{αν } L \in (0, \infty) \\ 0, & \text{αν } L = \infty \\ +\infty, & \text{αν } L = 0 \end{cases}$$

Πρόταση II.1. Θεωρούμε τη
δυναμοσειρά (1) με ακτίνα σύγκλισης
 $R \in [0, +\infty]$.

(α) Αν $R=0$, η (1) αποκλίνει, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

(β) Αν $R=+\infty$, η (1) συγκλίνει, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(γ) Αν $0 < R < +\infty$, τότε η (1)

- συγκλίνει, $\forall z \in D(z_0, R)$
- αποκλίνει, για $|z - z_0| > R$.

Ο δίσκος

$$(0 < R < \infty) \quad D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$$

λέγεται δίσκος σύγκλισης της (1).

Για $R = \infty$, ορίζουμε

$$D(z_0, R) = \mathbb{C}.$$

Θεώρημα II. 2. (Παραγωγή δυναμοσειράς)

Έστω $R \in (0, +\infty]$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in D(z_0, R).$$

Τότε, η f είναι ολόμορφη στο $D(z_0, R)$

και ισχύει

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad z \in D(z_0, R).$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω

Λήμμα II. 3. Έστω $z, h \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$\delta > 0$ με $|h| \leq \delta$. Τότε,

$$\left| (z+h)^n - z^n - n z^{n-1} h \right| \leq \frac{|h|^2}{\delta^2} (|z| + \delta)^n.$$

Απόδειξη:

9

Από το Διάνυσμα του Νεύτωνα έχουμε

$$\left| (z+h)^n - z^n - n z^{n-1} \cdot h \right| = \left| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} \cdot h^k \right|$$

$$\leq \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} \cdot |h|^k$$

$$= \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} \cdot |h|^2 \cdot |h|^{k-2}$$

$$\leq |h|^2 \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} \delta^{k-2}$$

$$= \frac{|h|^2}{\delta^2} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} \cdot \delta^k$$

$$\leq \frac{|h|^2}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} \cdot \delta^k$$

$$= \frac{|h|^2}{\delta^2} (|z| + \delta)^n.$$



Απόδειξη του Θ. II. 2:

Θέτουμε

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad (2)$$

Είναι $\limsup_n \sqrt[n]{n |a_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$

(αφού $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$), οπότε η

ακτίνα σύγκλισης της (2) είναι

$$\frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{n |a_n|}} = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Άρα, η g που δίνεται από την (2) ορίζεται για $z \in D(z_0, R)$.

• Υποθέτουμε ότι $z_0 = 0$. Τότε,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

για $|z| < R$.

Έστω $z \in D(z_0, R)$. Επιλέγουμε $\delta > 0$
 με

$$0 < \delta < R - |z|, \text{ για } R < \infty$$

κ' $\delta > 0$ ωχαιό, για $R = \infty$.

Έστω $h \in \Phi$ με
 $0 < |h| < \delta$.

Έχουμε

$$f(z+h) - f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [(z+h)^n - z^n]$$

$$\Rightarrow f(z+h) - f(z) - hg(z) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n [(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} h]$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} a_n [(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} h]$$

$$\Rightarrow |f(z+h) - f(z) - hg(z)| \leq$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot |(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} h|$$

(Λήμμα II.3)

$$|f(z+h) - f(z) - hg(z)| \leq$$

$$\leq \frac{|h|^2}{\delta^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot (|z| + \delta)^n$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{\delta^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot (|z| + \delta)^n.$$

Αλλά, η ακτίνα σύγκλισης της

δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$

είναι R , ενώ $|z| + \delta < R$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (|z| + \delta)^n = M < \infty.$$

Έχουμε λοιπόν ότι για $0 < |h| < \delta$,

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| \leq \frac{M}{\delta^2} |h|$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = g(z)$$

$$\Rightarrow f \text{ διαφορίσιμη στο } z \text{ κ'}$$

$$f'(z) = g(z), \quad \forall z \in D(0, R).$$

• Γενική περίπτωση: $z_0 \in \mathbb{C}$.

Εφαρμόζουμε την προηγούμενη περίπτωση για τη συνάρτηση

$$\tilde{f}(w) = f(w + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \quad |w| < R$$

κ' παίρνουμε

$$f'(w + z_0) = \tilde{f}'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}, \quad \text{για } |w| < R.$$

Άρα, για $|z - z_0| < R$, θέτοντας $w = z - z_0$,

παίρνουμε

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}. \quad \square$$

Πρόταση II.4. Έστω η δυναμοσειρά

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in D(z_0, R)$$

($0 < R \leq \infty$).

Τότε, υπάρχουν όλοι οι παράγωγοι

$f', f'', \dots, f^{(k)}, \dots, k \geq 1$

και ισχύει $\forall k \geq 1$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n (z-z_0)^{n-k},$$

για $z \in D(z_0, R)$.

Επιπλέον,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη:

Η απόδειξη του α' σκέλους γίνεται

με επαγωγή στο k , με χρήση του Θ. II.2.

Για το β' σκέλος έχουμε, $\forall k \geq 1$,

$$f^{(k)}(z_0) = k(k-1)\dots 1 \cdot a_k = k! a_k,$$

ενώ προφανώς $f(z_0) = a_0$. \square

III. Ομοιόμορρη σύγκλιση ακολουθιών κ' σειρών συναρτήσεων.

Ορισμός III.1. Έστω $K \subseteq \mathbb{C}$ και

μια ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n : K \rightarrow \mathbb{C}, n \geq 1.$$

Έστω και $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση.

Θα λέμε ότι

$$\underline{f_n \rightarrow f \text{ ομοιόμορφα στο } K}$$

αν $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \forall z \in K,$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Πρόταση III.2: Έστω γ τμ. λεία καμπύλη

κ' $f_n : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}, n \geq 1, f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχείς

με $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο γ^* .

Τότε,

$$\lim_n \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή
 $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο γ^* ,
 $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \forall z \in \gamma^*,$
 $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon / \|\gamma\|,$

όπου $\|\gamma\| = \mu(\gamma)$. Τότε, $\forall n \geq n_0,$

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} [f_n(z) - f(z)] dz \right|$$

$$\stackrel{\text{(ML-αριθ.)}}{\leq} \frac{\varepsilon}{\|\gamma\|} \cdot \|\gamma\| = \varepsilon.$$



Πρόταση III.3: Έστω γ κμ. λεία

καμπύλη κ' $f_n: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}, n \geq 1,$ συνεχείς,

ώστε

$$|f_n(z)| \leq \theta_n, \quad z \in \gamma^*, \quad n \geq 1,$$

όπου $(\theta_n) \subset (0, +\infty)$ με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty.$$

Τότε,

$$\int_{\gamma} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right] dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

Απόδειξη: Θ έστωμε

$$g_n(z) = \sum_{j=1}^n f_j(z), \quad n \geq 1, z \in \gamma^*$$

$$g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(z), \quad z \in \gamma^*.$$

Η $g: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ ορίζεται καλώς, αφού

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(z)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j < \infty, \quad \forall z \in \gamma^*.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\sum_{j=1}^{\infty} \theta_j < \infty$,

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid \sum_{j > N} \theta_j < \varepsilon.$$

Τότε, $\forall n \geq N, \forall z \in \gamma^*$,

$$|g_n(z) - g(z)| = \left| \sum_{j > n} f_j(z) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j > n} |f_j(z)| \leq \sum_{j > n} \theta_j \leq \sum_{j > N} \theta_j < \varepsilon.$$

Άρα,

$g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο γ^* .

Επιπλέον, η g είναι συνεχής.

Πράγματι: έστω $z_0 \in \gamma^*$, $\varepsilon > 0$.

Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ | $N \geq 1$ και

$$\underline{|g_N(z) - g(z)| < \varepsilon/3, \quad \forall z \in \gamma^*}$$

(σημ. ότι $g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα στο γ^*)

Επειδή g_N συνεχής στο z_0 ,

$$\exists \delta > 0 \mid \forall z \in \gamma^* \text{ με } |z - z_0| < \delta,$$

$$\text{ισχύει } \underline{|g_N(z) - g_N(z_0)| < \varepsilon/3.}$$

Τότε, για $z \in \gamma^*$ με $|z - z_0| < \delta$,

$$\begin{aligned} |g(z) - g(z_0)| &\leq |g(z) - g_N(z)| + \\ &+ |g_N(z) - g_N(z_0)| + |g_N(z_0) - g(z_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Από Πρότ. III. 2,

$$\lim_n \int_{\gamma} g_n(z) dz = \int_{\gamma} g(z) dz. \quad \square$$