

ΘΕΩΡΗΜΑ CAUCHY-GOURSAT

Ορισμός 1: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο (δηλ.

ανοικτό συνεκτικό). Το U λέγεται
απλά συνεκτικό αν το εσωτερικό

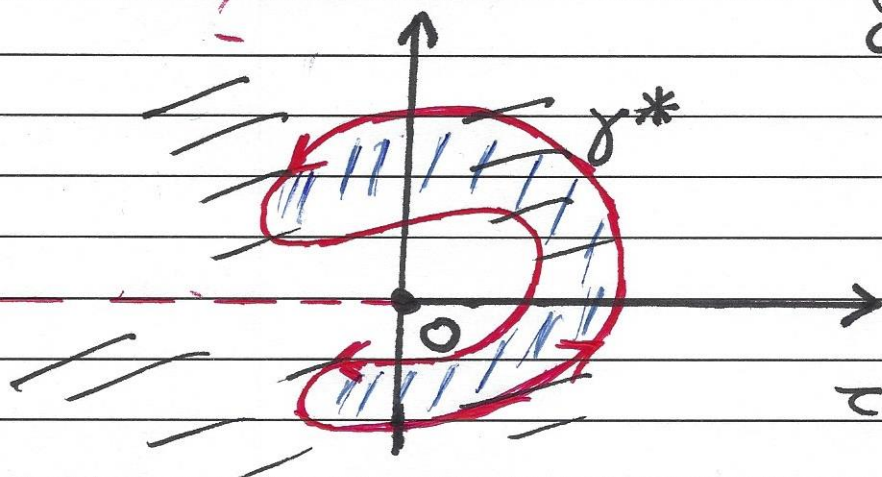
κάθε κλειστής καμπύλης γ με $\gamma^* \subset U$
περιέχεται στο U .

Γεωμετρικά, απλά συνεκτικό πεδίο
είναι ένα πεδίο χωρίς "οπές!"

Παραδείγματα:

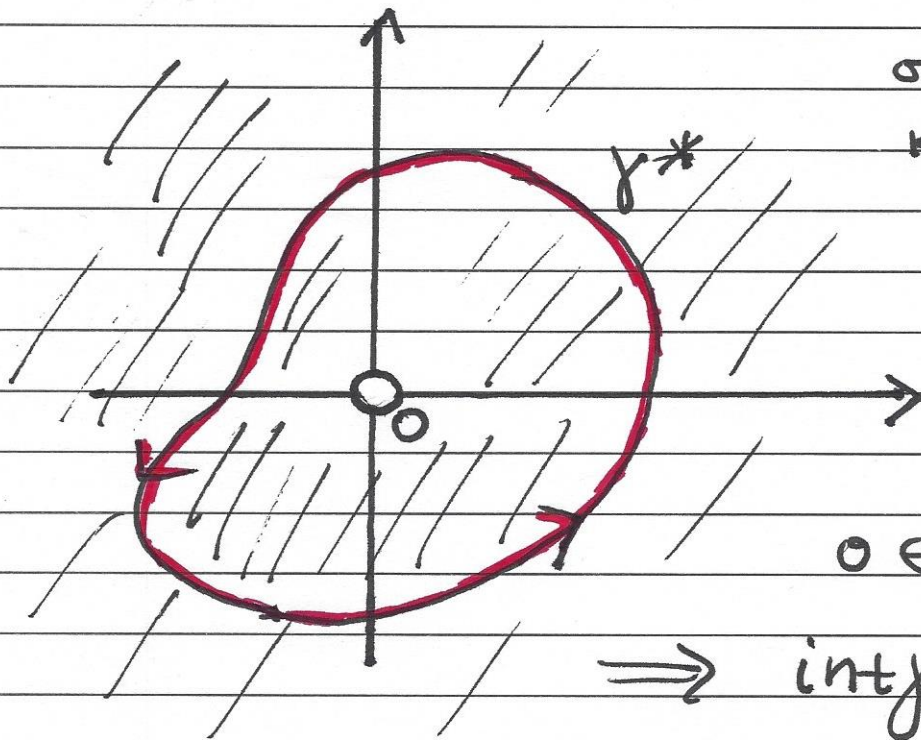
(i) Κάθε ανοικτός δίσκος είναι απλά
συνεκτικό.

(ii) Το $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ είναι απλά
συνεκτικό.



Όπως φαίνεται στο
σχήμα, εάν
 γ κλειστή
καμπύλη
με $\gamma^* \subset U$,
τότε $\text{int} \gamma^* \subset U$.

(iii) Το πεδίο $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ δεν είναι απλά συνεκτικό. Πράγματι, στο



σχήμα, η καμπύλη γ

είναι κλειστή με $\gamma^* \subset U$

αλλά

$0 \in \text{int} \gamma^*$

$\Rightarrow \text{int} \gamma^* \not\subset U.$

Θεώρημα 1 (Θ. Cauchy - Goursat!!)

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ απλά συνεκτικό πεδίο και $f \in H(U)$ (δηλ. $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη).

Εάν γ κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma^* \subset U$, τότε

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Η απόδειξη του Θ. 1 δόθηκε από τον E. Goursat (1883)

(εδώ παραλείπεται).

Το 1825, ο L-A. Cauchy έδωσε

μια απλή απόδειξη του Θ. 1 αλλά
με την επιπλέον υπόθεση ότι
 f' συνεχής!

Εδώ θα δώσουμε την απόδειξη του
Θ. 1 υποθέτοντας ότι:

- f' συνεχής
- γ λεία

Η απόδειξη βασίζεται στο Θ. Green:

Θεώρημα 2 (Green):

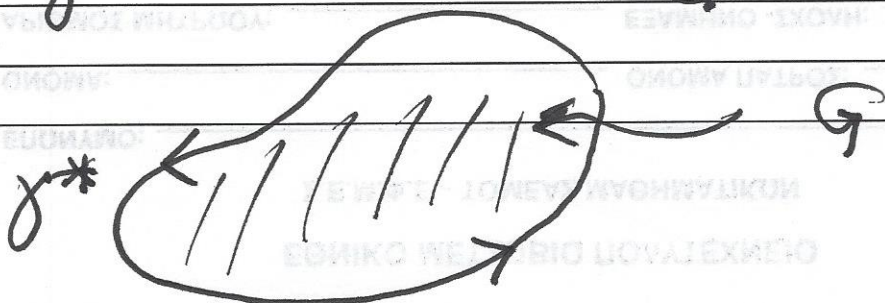
Έστω G απλά συνεκτικό πεδίο $\subseteq \mathbb{R}^2$
με σύνορο μια θετικά προσανατο-
λωμένη τμ. λεία καμπύλη γ

$$\text{κ' } P = P(x, y), \quad Q = Q(x, y) : G \rightarrow \mathbb{R}$$

συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παρα-
γώγους πρώτης τάξης στο G .

Τότε,

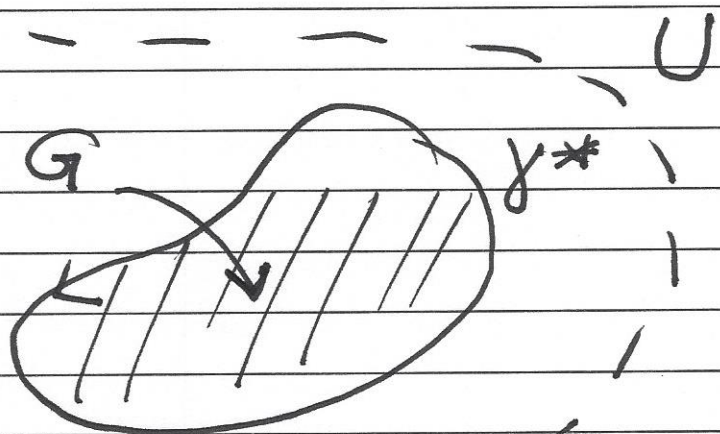
$$\oint_{\gamma} (P dx + Q dy) = \iint_G (Q_x - P_y) dx dy.$$



Απόδειξη Θ.1: Υποθέτουμε ότι

• f' συνεχής στο U

• γ λεία



Έστω
 $f = u + iv$

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

με
 $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$,
 $t \in [a, b]$.

Τότε, $f' = u_x + iv_x$ στο U

$$\text{κ' } \left\{ \begin{array}{l} (C-R) \\ u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right. \text{ στο } U.$$

Επειδή f' συνεχής, έπεται ότι

$$\boxed{u_x, u_y, v_x, v_y \text{ συνεχείς στο } U.}$$

Επιπλέον, $x(\cdot), y(\cdot) \in C^1[a, b]$ αφού

γ λεία. Θα χρησιμοποιήσουμε
την "αύξηση"

$$\gamma(t) \equiv (x(t), y(t)),$$

$$t \in [a, b].$$

Έχουμε



$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt =$$

$$= \int_a^b [u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))] \cdot [x'(t) + iy'(t)] dt$$

$$= \int_a^b [u(\gamma(t))x'(t) - v(\gamma(t))y'(t)] dt +$$

$$+ i \int_a^b [u(\gamma(t))y'(t) + v(\gamma(t))x'(t)] dt$$

$$= \int_a^b (u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t) dt +$$

$$+ i \int_a^b (v(\gamma(t)), u(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t) dt$$

(με (\cdot) συμβολίζουμε το εσωτερικό
 γινόμενο στον \mathbb{R}^2 & εφαρμόσαμε

την ταύτιση

$$\gamma(t) \equiv (x(t), y(t)),$$

$$\gamma'(t) \equiv (x'(t), y'(t)).$$

Με βάση τα παραπάνω και τον ορισμό του επικαμυγίου ολοκληρώματος, παίρνουμε

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} (u dx - v dy) + i \oint_{\gamma} (v dx + u dy). \quad (1)$$

Επειδή οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο απλά

συνεκτικό πεδίο $G = \text{int} \gamma^* \subseteq U$

(σημ. ότι U απλά συνεκτικό $\gamma^* \subset U$),

μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ. Green

σε κάθε ένα από τα επικαμύγια ολοκληρώματα του β' μέλους της (1). Έτσι έχουμε

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \iint_G (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_G (u_x - v_y) dx dy \quad \stackrel{(C-R)}{=} 0 + i \cdot 0 = 0.$$



Θεώρημα 3 (ισχυρή έκδοση θεωρήματος Cauchy - Goursat):

Έστω γ κλειστή καμπύλη με απλά συνεκτικό εσωτερικό $\Omega = \text{int} \gamma^*$

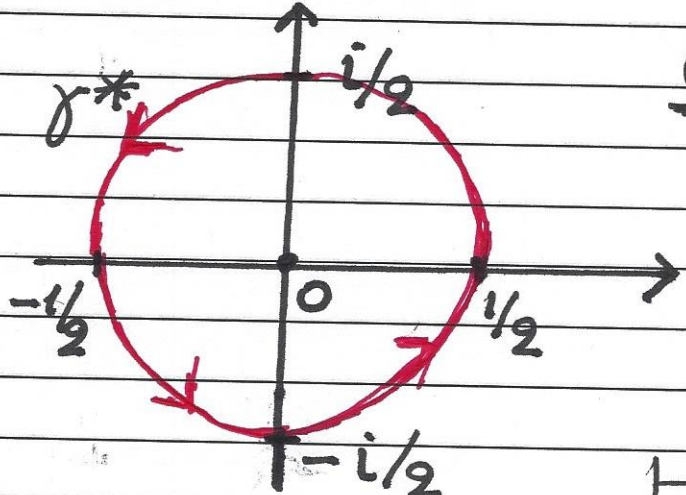
$f: \Omega \cup \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής

με $f|_{\Omega} \in H(\Omega)$. Τότε,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

[Η απόδειξη παραλείπεται.]

Παραδείγματα:



(α) $\gamma(t) = \frac{1}{2} e^{it}$,
 $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}$$

Η f είναι ολόμορφη

στο $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\} = U$, $\gamma^* \subset U$.

Το $\text{int} \gamma^* = D(0, 1/2)$ είναι απλά συνεκτικό

$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$

(8) $\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$

$$f(z) = \sin(e^z) + \bar{z} + |z+1|^2, z \in \mathbb{C}.$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = ?$$

f συνεχής στο \mathbb{C} αλλά όχι

ολομορφή (δεν εφαρμόζεται το

θ -Cauchy στην f !!)

Παρά ολομορφή, $\forall z \in \gamma^*$, έχουμε

$$|z|=1 \Rightarrow \bar{z} = 1/z$$

και

$$f(z) = \sin(e^z) + \frac{1}{z} + |z|^2 + z + \bar{z} + 1$$

$$= \sin(e^z) + \frac{1}{z} + 1 + z + \frac{1}{z} + 1$$

$$= \underbrace{\sin(e^z) + z + 2}_{g(z)} + \frac{2}{z}.$$

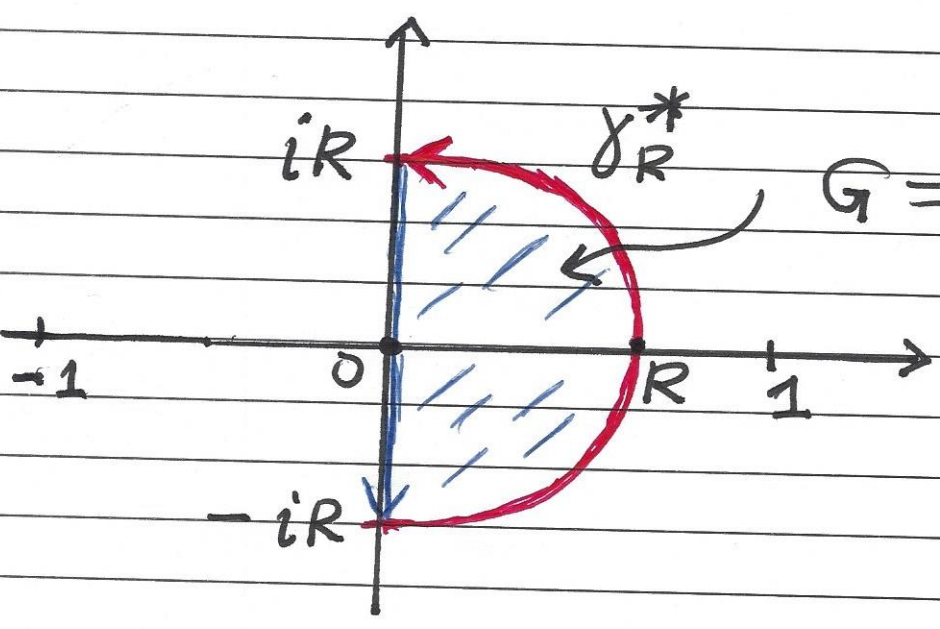
Αλλά, $g \in H(\mathbb{C}) \xrightarrow{\theta.3} \int_{\gamma} g(z) dz = 0$

$$\rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 2 \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2 \cdot 2\pi i = \underline{\underline{4\pi i}}.$$

(r) $\gamma_R(t) = R e^{it}, t \in [-\pi/2, \pi/2]$

$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ $1 > R > 0$

$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = ?$



$G = \text{int } \Gamma_R^*$

Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη

$\Gamma_R = \gamma_R + [iR, -iR]$

Η Γ_R είναι ψηφιακά λεία & ε'

το εσωτερικό της $G = \text{int } \Gamma_R^*$ είναι ομομορφικά συνεκτικό.

Επιπλέον, $\pm 1 \notin G \cup \Gamma_R^*$

$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$

$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z) dz = - \int_{[iR, -iR]} f(z) dz =$

$$= \int_{[-iR, iR]} f(z) dz = \int_{-R}^R f(it) d(it) =$$

$$= i \int_{-R}^R \frac{dt}{-t^2 - 1} = -2i \int_0^R \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= -2i \operatorname{Arctant} \Big|_0^R = -2i \operatorname{Arctan} R.$$

Ακολουθεί μια εφαρμογή στον υπολογισμό γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

ΑΣΚΗΣΗ:

(a) Να δείξετε ότι $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz = 0$,

όπου $\sigma_R(t) = R + it, t \in [0, R]$.

(b) Να δείξετε ότι

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt \stackrel{(*)}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

(*) γνωστό από την Άσκ. II.

Λύση:

(α) Για $z = \frac{\sigma}{R}(t) = R + it$, $t \in [0, R]$,

έχουμε

$$iz^2 = i(R^2 - t^2 + 2iRt)$$

$$= -2Rt + i(R^2 - t^2)$$

$$\Rightarrow |e^{iz^2}| = e^{\operatorname{Re}(iz^2)} = e^{-2Rt}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz \right| \stackrel{(*)}{=} \left| \int_0^R e^{i\sigma_R^2(t)} i dt \right|$$

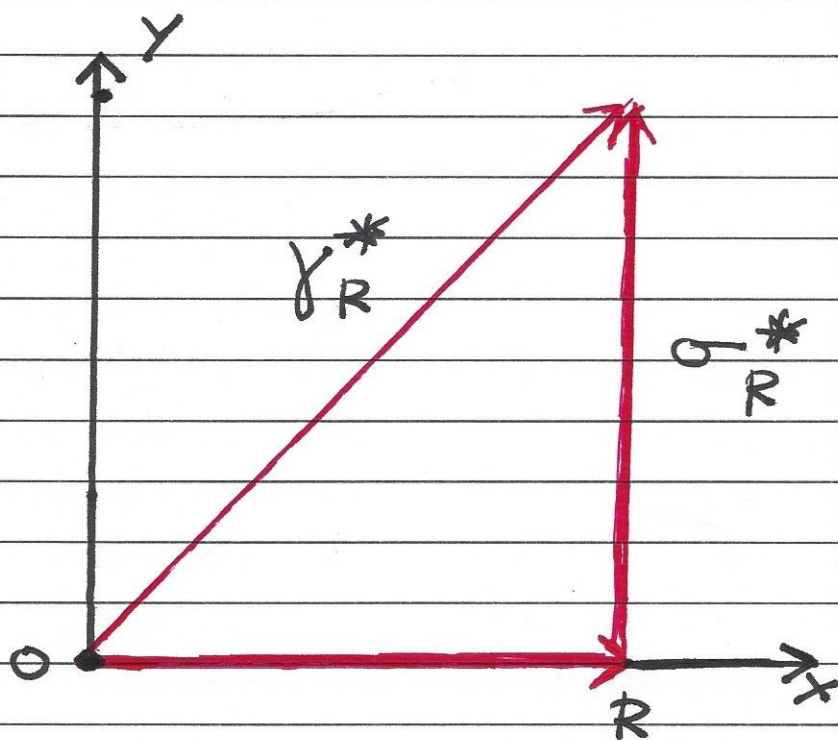
$$\leq \int_0^R |e^{i\sigma_R^2(t)}| dt$$

$$= \int_0^R e^{-2Rt} dt = \frac{1 - e^{-2R^2}}{2R}$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

(*) [ΔΕΝ ΕΞΥΠΗΡΕΤΕΙ Η ML-ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ !!]

(β)



Θεωρούμε γ^* το ευθ. τμήμα

$$\gamma_R(t) = t + it, \quad t \in [0, R]$$

(βλ. σχήμα).

Θέτουμε $\Gamma_R = [0, R] + \sigma_R^* - \gamma_R$. Q.3

Η Γ_R είναι κλειστή, τμήμ. λεία \Rightarrow

$$\int_{\Gamma_R} e^{iz^2} dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^R e^{it^2} dt + \int_{\sigma_R^*} e^{iz^2} dz = \int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz$$

(2)

Αλλά, για $z = t + it = (1+i)t$,

έχουμε $z^2 = 2it^2 \Rightarrow iz^2 = -2t^2$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{-2t^2} (1+i) dt$$

$$= \int_0^R e^{-2t^2} dt + i \int_0^R e^{-2t^2} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^R e^{it^2} dt + \int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz =$$

$$= \int_0^R e^{-2t^2} dt + i \int_0^R e^{-2t^2} dt.$$

Παίρνοντας στην τελευταία το όριο καθώς $R \rightarrow +\infty$, παίρνουμε

(λόγω του ερωτ. (a)),

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt + i \int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt.$$

Επειδή $e^{it^2} = \cos(t^2) + i \sin(t^2)$,

προκύπτει η αποδεδειγμένη. \square