

Εξέταση: Μαθηματική Ανάλυση  
και Γραμμική Άλγεβρα

Σεπτέμβριος 2021

23 Σεπτ. 08:30

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών



Διάρκεια εξέτασης: 1 ώρα και 30 λεπτά

Διδάσκοντες:  
Β. Γρηγοριάδης  
Κ. Παυλοπούλου

**Σημείωση.**

Για να εξεταστείτε επιτυχώς στο μάθημα θα πρέπει να εξασφαλίσετε 2 μονάδες σε κάθε μία από τις δύο ενότητες του μαθήματος.

Ενότητα Μαθηματικής Ανάλυσης

**Θέμα 1.**

(i) Εξετάστε αν η πιο κάτω ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι άνω φραγμένη **(0,4 μ.)**.

$$a_n = \begin{cases} 2^n, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

(ii) Εξετάστε αν οι σειρές

$$(0,4\mu.) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 \cdot 5^n} \quad (0,4\mu.) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2}$$

συγκλίνουν.

**Θέμα 2.** Δίνεται η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1 = \frac{5}{2} \quad a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (a_n - 2)^2 + 2, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(i) Να δειχθεί με επαγωγή ότι  $2 \leq a_n \leq 3$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$ . **(0,6 μ.)**

(ii) Να δειχθεί ότι η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι φθίνουσα. **(0,8 μ.)**

(iii) Εξηγήστε γιατί η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  συγκλίνει και να υπολογίσετε το όριό της. **(0,6 μ.)**

**Θέμα 3.**

(i) Να δώσετε το ανάπτυγμα της συνάρτησης  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \cos x$  σε δυναμοσειρά κέντρου 0 και να αποδείξετε ότι

$$\left| \cos\left(\frac{1}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3^2 \cdot 2!}\right) \right| \leq \frac{1}{3^3 \cdot 3!}. \quad (1\mu.)$$

(ii) Να υπολογιστεί το άοριστο ολοκλήρωμα

$$(0,8\mu.) \quad I = \int \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx.$$

## Ευότητα Γραμμικής Άλγεβρας

**Θέμα 1. (2 μ.)** Να λυθεί το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων για όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού  $m$  για τις οποίες είναι συμβιβαστό:

$$\begin{cases} x - y + z = 7 \\ 2x + m \cdot y - 4z = m \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

**Θέμα 2. (2 μ.)** Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (i) Να υπολογίσετε την τάξη του πίνακα  $A$  ( $\text{rank}A$ ) και στη συνέχεια να βρείτε τις ιδιοτιμές του.
- (ii) Ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται; (εξήγηση). Ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται; (εξήγηση).

**Θέμα 3. (1 μ.)** Δίνεται η εξίσωση της ευθείας

$$(\varepsilon) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z-1$$

και η εξίσωση του επιπέδου

$$(\pi) : x + y + z = 1.$$

- (i) Να βρεθεί το σημείο τομής  $A$  του επιπέδου  $(\pi)$  και της ευθείας  $(\varepsilon)$ .
- (ii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που βρίσκεται στο επίπεδο  $(\pi)$ , είναι κάθετη στην ευθεία  $(\varepsilon)$  και διέρχεται από το σημείο  $A$ .