

Εξέταση: Μαθηματική
Ανάλυση
και Γραμμική Άλγεβρα
(Επί πτυχίω)

Ιούνιος 2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών



Διάρκεια εξέτασης: 1 ώρα και 30 λεπτά

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Σημείωση.

Για να εξεταστείτε επιτυχώς στο μάθημα θα πρέπει να εξασφαλίσετε 2 μονάδες σε κάθε μία από τις δύο ενότητες του μαθήματος.

Ενότητα Μαθηματικής Ανάλυσης

Θέμα 1. Δίνεται μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ από θετικούς αριθμούς.

(i) Γιατί είναι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ συγκλίνουσα; **(0,5 μ.)**

(ii) Αν ισχύει **επιπλέον** ότι

$$a_1 < 2 \quad \text{και} \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 - a_n}{2} + 1, \quad \text{για κάθε } n \geq 1$$

να υπολογίσετε το όριο της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. **(0,7 μ.)**

Θέμα 2.

(i) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$(0,5\mu.) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{4^n} \quad (0,5\mu.) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2}{2n^2+1} \right)^n.$$

(ii) Να βρεθεί το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά

$$(1\mu.) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$$

συγκλίνει.

Θέμα 3.

(i) Δίνεται η συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x \cdot e^x.$$

Να αναπτυχθεί η f σε δυναμοσειρά κέντρου 0 και να υπολογιστεί η τιμή $f^{(17)}(0)$ της παραγώγου 17ης τάξης της f στο 0. **(1 μ.)**

(ii) Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$(0,8\mu.) \quad I = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 17} dx.$$

Ενότητα Γραμμικής Άλγεβρας

Θέμα 1. Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (i) Να υπολογίσετε τον βαθμό (τάξη) του πίνακα A (rank A). **(0,5 μ.)**
- (ii) Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του πίνακα A . **(0,5 μ.)**
- (iii) Ο πίνακας A αντιστρέφεται; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(0,5 μ.)**
- (iv) Ο πίνακας A διαγωνοποιείται; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(0,5 μ.)**

Θέμα 2. Δίνεται το σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y, z :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \beta z = 3 \\ x + \beta y + 3z = -3 \end{cases}$$

Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\beta \in \mathbb{R}$, το σύστημα

- (i) είναι αδύνατο; **(0,6 μ.)**
- (ii) έχει μόνο μία λύση και ποια είναι αυτή; **(0,7 μ.)**
- (iii) έχει άπειρες λύσεις και ποια είναι η μορφή τους; **(0,7 μ.)**

Θέμα 3. Δίνεται η εξίσωση του επιπέδου

$$(\Pi) : x + y + z = 1$$

και η εξίσωση της ευθείας

$$(\varepsilon) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z-1.$$

- (i) Να βρεθεί το σημείο τομής A του επιπέδου (Π) και της ευθείας (ε) . **(0,5 μ.)**
- (ii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που βρίσκεται στο επίπεδο (Π) , είναι κάθετη στην ευθεία (ε) και διέρχεται από το σημείο A . **(0,5 μ.)**