Δυναμοσειρές - Θεώρημα Taylor

Βασίλειος Γρηγοριάδης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σειρές που ξεκινάνε από ένα n_0.

Ορίζεται η έννοια της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, όταν έχουμε πραγματικούς αριθμούς $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$.

Ακολουθία μερικών αθροισμάτων $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $s_1 = a_0$, $s_2 = a_0 + a_1$, $s_3 = a_0 + a_1 + a_2$, κ.ο.κ.

Τότε το όριο της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ είναι το όριο της ακολουθίας $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ εφόσον αυτό υπάρχει.

Διαισθητικά: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \ldots$

Αυστηρά: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Όμοια ορίζεται η έννοια της σειράς

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n + \ldots, \text{ όπου } n_0 \in \mathbb{N}.$$

Ό,τι ισχύει για τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, π.χ. τα κριτήρια σύγκλισης,

ισχύει και για τις σειρές της μορφής $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Δυναμοσειρές

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη σειρά που προκύπτει από τους αριθμούς $a_n \cdot x^n$ όπου $n = 0, 1, \dots,$ δηλαδή την $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

Με x^0 εννοούμε τον αριθμό 1. Έχουμε λοιπόν

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots .$$

Προφανώς η πιο πάνω σειρά εξαρτάται από το $x \in \mathbb{R}$, για διαφορετικές τιμές του x παίρνουμε διαφορετική σειρά.

Η συνάρτηση που αντιστοιχεί σε ένα x τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ονομάζεται *δυναμοσειρά*.

Γενικά έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός:

Δυναμοσειρά κέντρου $c \in \mathbb{R}$ *και* συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *είναι η συνάρτηση*

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$$
$$= a_0 + a_1 \cdot (x-c) + a_2 \cdot (x-c)^2 + \cdots + a_n \cdot (x-c)^n + \ldots.$$

Η περίπτωση $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ *είναι δυναμοσειρά κέντρου* 0.

Παρατηρήσεις:

1) Οι δυναμοσειρές επεκτείνουν την έννοια του πολυωνύμου.

2) Δεν έχουμε μιλήσει για το πεδίο ορισμού της δυναμοσειράς, δηλαδή για ποια $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$;

Θα δούμε την απάντηση στις επόμενες διαφάνειες.

3) Οι δυναμοσειρές αντί από το 0 μπορεί να ξεκινάνε και από το 1, 2, κτλ.

Παραδείγματα:

1) Παίρνουμε $a_n = 1$ για κάθε n και κέντρο $c = 0$. Τότε έχουμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ή ισοδύναμα $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, εδώ έχουμε $a_n = \frac{1}{n!}$ για κάθε n και κέντρο $c = 0$.

Παραδείγματα: (Συνέχεια)

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1}$, εδώ έχουμε $a_n = \frac{1}{n+1}$ για κάθε n και κέντρο $c = 1$.

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot x^n$. Εδώ έχουμε $a_n = \frac{2^n}{n!}$ για κάθε n και κέντρο $c = 0$.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n!}$. Έχουμε

$$(2x-1)^n = (2 \cdot (x - 1/2))^n = 2^n \cdot (x - 1/2)^n.$$

Επομένως η δυναμοσειρά γίνεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 2^n \cdot (x - 1/2)^n.$$

Αυτή είναι δυναμοσειρά *κεντρου $c = 1/2$*. Επίσης $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

Μπορεί επίσης να έχουμε $a_n = 0$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$. Τότε θα λείπουν κάποιες δυνάμεις του x. Αν π.χ. έχουμε $a_n = 0$ για κάθε περιττό αριθμό n τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$ γράφεται πιο απλά $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \cdot (x-c)^{2n}$.

Μάλιστα αν θέσουμε $b_n = a_{2n}$ η τελευταία δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x-c)^{2n}$.

Συμπέρασμα: Μπορούμε να έχουμε δυναμοσειρές της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^{2n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^{3n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^{4n-1}$ κ.ο.κ.

Σύγκλιση δυναμοσειράς

Ερώτημα: Για ποια $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$;

Προφανής παρατήρηση: Σίγουρα συγκλίνει για $x = c$ γιατί τότε η σειρά γίνεται

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \cdots + a_n \cdot 0^n + \cdots = a_0.$$

Σύγκλιση δυναμοσειράς

Θεώρημα:

Δίνεται η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$. *Τότε ισχύει* ακριβώς ένα *από τα ακόλουθα.*

1) Η πιο πάνω σειρά συγκλίνει μόνο για $x=c$. *Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η* ακτίνα σύγκλισης *της δυναμοσειράς είναι* 0.

2) Η πιο πάνω σειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. *Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η* ακτίνα σύγκλισης *της δυναμοσειράς είναι* ∞.

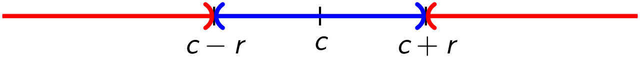
3) Υπάρχει $r \in (0,\infty)$ *έτσι ώστε για κάθε* $x \in \mathbb{R}$:

αν $|x-c| < r$ *τότε η σειρά συγκλίνει και μάλιστα απολύτως*

αν $|x-c| > r$ *τότε η σειρά αποκλίνει.*

Στα $x = c \pm r$ *το αποτέλεσμα διαφέρει ανάλογα με τη σειρά. Τότε λέμε ότι η* ακτίνα σύγκλισης *της δυναμοσειράς είναι* r.

Σχήμα στην 3η περίπτωση:



Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$ συγκλίνει απολύτως για όλα τα x στην μπλε περιοχή και αποκλίνει για όλα τα x στην κόκκινη περιοχή

Εύρεση ακτίνας σύγκλισης

Το βασικό εργαλείο για να βρίσκουμε την ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς είναι το *Κριτήριο του Λόγου*.

Βρίσκουμε με τη βοήθεια του Κριτηρίου του Λόγου την ακτίνα σύγκλισης των πιο κάτω δυναμοσειρών, όπως επίσης και το σύνολο όλων των x για τα οποία η σειρά συγκλίνει.

Παραδείγματα:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Θεωρούμε ένα $x \neq 0$. Έχουμε

$$\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = |x| \cdot \frac{1}{n} \to 0.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αυτό ισχύει για κάθε $x \neq 0$. (Για $x = 0$ έχουμε έτσι κι αλλιώς σύγκλιση).

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης.

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot x^n$. Θεωρούμε ένα $x \neq 0$. Έχουμε

$$\left| \left(\frac{3^{n+1}}{n+2} \cdot x^{n+1} \right) \cdot \left(\frac{n+1}{3^n} \cdot \frac{1}{x^n} \right) \right| = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right|$$

$$= 3 \cdot |x| \cdot \frac{n+1}{n+2} \longrightarrow 3 \cdot |x|.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου έχουμε ότι αν $3|x| < 1$ τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως ενώ όταν $3|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει.

Ισχύει $3|x| < 1 \iff |x| < 1/3 \iff -1/3 < x < 1/3$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι το $1/3$. Για $x \in (-1/3, 1/3)$ η σειρά συγκλίνει απολύτως, ενώ για $|x| > 1/3$ η σειρά αποκλίνει.

Απομένει να εξετάσουμε τι γίνεται για $|x| = 1/3$. Για $x = 1/3$ η σειρά γίνεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

που *αποκλίνει*.

Για $x = -1/3$ η σειρά γίνεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (-1)^n$$

η οποία *συγκλίνει* από το Κριτήριο του Leibniz.

Συνοψίζοντας η σειρά συγκλίνει ακριβώς στα $x \in [-1/3, 1/3)$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{4^n}$. Φέρνουμε τη δυναμοσειρά στη γνωστή μορφή,

$$(2x-1)^n = 2^n \cdot (x-1/2)^n,$$

άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4^n} \cdot (x-1/2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot (x-1/2)^n.$$

Θεωρούμε $x \neq 1/2$ και εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου,

$$\left| \frac{(x-1/2)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(x-1/2)^n} \right| = \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \left| \frac{(x-1/2)^{n+1}}{(x-1/2)^n} \right| = 1/2 \cdot |x-1/2|.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου για $(1/2) \cdot |x-1/2| < 1$, ισοδύναμα για $|x-1/2| < 2$ η σειρά συγκλίνει απολύτως, ενώ για $|x-1/2| > 2$ η σειρά αποκλίνει.

Βλέπουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης είναι 2.

Τέλος εξετάζουμε την περίπτωση $|x-1/2|=2$. Αν $x-1/2=2$, ισοδύναμα αν $x=5/2$, τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot(x-1/2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot 2^n=\sum_{n=0}^{\infty}1$$

η οποία αποκλίνει.

Αν $x-1/2=-2$, ισοδύναμα αν $x=-3/2$ τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot(x-1/2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot(-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

που αποκλίνει επίσης.

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει ακριβώς για $x\in(-3/2,5/2)$.

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.Θεωρούμε $x \neq 0$. Μπορούμε να δούμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ σαν $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ όπου

$$b_n = (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ .$$

Επομένως παίρνουμε τον λόγο b_{n+1}/b_n. Έχουμε

$$\left|(-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{1}{(-1)^n} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}}\right| = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \cdot \left|\frac{x^{2n+2}}{x^2 n}\right|$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \cdot |x^2| \ \longrightarrow \ 0.$$

Άρα η δυναμοσειρά έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης, δηλαδή συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$. Θεωρούμε $x \neq 0$ και έχουμε

$$\left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right| = n \cdot |x| \longrightarrow \infty > 1.$$

Άρα η σειρά δεν συγκλίνει για κανένα $x \neq 0$. Επομένως συγκλίνει μόνο για $x = 0$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι 0.

Το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών

Θεώρημα:

Θεωρούμε μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$, *η οποία συγκλίνει για κάθε* $x \in I$, *όπου το* I *είναι ανοικτό διάστημα. Τότε η συνάρτηση*

$$f : I \to \mathbb{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$$

είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της είναι η δυναμοσειρά που προκύπτει από την παραγώγιση κάθε όρου, δηλαδή

$$\begin{aligned} & \left(a_0 + a_1 \cdot (x-c) + a_2 \cdot (x-c)^2 + \cdots + a_n \cdot (x-c)^n + \dots\right)' \\ = \quad & a_1 + 2a_2 \cdot (x-c) + \cdots + na_n \cdot (x-c)^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

για κάθε $x \in I$.

Με χρήση του συμβόλου $\sum$ ο κανόνας παραγώγισης γράφεται ως εξής:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-1}.$$

Παρατήρηση. Εφόσον η παράγωγος της δυναμοσειράς είναι δυναμοσειρά, μπορούμε να ξαναπαραγωγίσουμε κ.ο.κ.

Καταλήγουμε ότι μια δυναμοσειρά είναι *άπειρες φορές παραγωγίσιμη*.

Παραδείγματα:

1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$. Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε

$$\left| \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{x^n} \right| = \frac{|x|}{2},$$

άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως για $|x|/2 < 1$, ισοδύναμα $|x| < 2$, ισοδύναμα $x \in I = (-2, 2)$.

Από το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών η f παραγωγίζεται και ισχύει

$$f'(x) = \sum_{n=1} \frac{n}{2^n} \cdot x^{n-1}, \quad x \in (-2, 2).$$

2) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Είδαμε προηγουμένως ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών έχουμε

$$
\begin{aligned}
f'(x) = & \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots\right)' \\
&= 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots + \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} + \dots \\
&= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

Βλέπουμε ότι ισχύει $f' = f$.

Το Θεώρημα Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών

Θεώρημα:

Έστω I ανοικτό διάστημα με κέντρο c και υποθέτουμε ότι η δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - c)^n$$

συγκλίνει για κάθε $x \in I$. Τότε η f έχει αόριστο ολοκλήρωμα το οποίο δίνεται από τη δυναμοσειρά που προκύπτει από την ολοκλήρωση του κάθε όρου, δηλαδή

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x - c)^{n+1} + K, \quad x \in I,$$

όπου K είναι μία σταθερά.

Τεχνικές ανάπτυξης σε δυναμοσειρά

Είναι γνωστό ότι για μια μεγάλη κατηγορία συναρτήσεων $f\colon I \to \mathbb{R}$, όπου I ανοικτό διάστημα, μπορούμε να γράψουμε αλλιώς να *αναπτύξουμε* την f σε *δυναμοσειρά*. Παραθέτουμε μερικές τεχνικές.

(A) Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά με χρήση του τύπου της γεωμετρικής σειράς.

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,, \quad \text{για κάθε } x \text{ με } |x| < 1.$$

Αντικαθιστώντας το x με το $-x$ παίρνουμε

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n, \quad \text{για κάθε } x \text{ με } |-x| = |x| < 1.$$

Άλλα παραδείγματα:

1) $f(x) = \dfrac{1}{2-3x}$, $x \neq 2/3$.

Έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \cdot x} .$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο της γεωμετρικής σειράς με το $(3/2) \cdot x$ στη θέση του x. Αν λοιπόν $|(3/2) \cdot x| < 1$, ισοδύναμα αν $|x| < 2/3$, έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \cdot x \right)^n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} \cdot x^n.$$

Επομένως $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} \cdot x^n$ για κάθε x με $|x| < 2/3$.

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{3+5x}$, $x \neq -3/5$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι $f(x) = x^2 \cdot f_1(x)$ όπου $f_1(x) = \dfrac{1}{3+5x}$.

Σχετικά με την f_1 έχουμε

$$f_1(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+(5/3)\cdot x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(-5/3)\cdot x} \ .$$

Όπως με πριν αν έχουμε $|(5/3)x| < 1$, ισοδύναμα αν $|x| < 3/5$ έχουμε

$$f_1(x) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{3} \cdot x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^{n+1}} \cdot (-1)^n \cdot x^n.$$

Οπότε έχουμε

$$f(x) = x^2 \cdot f_1(x) = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^{n+1}} \cdot (-1)^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^{n+1}} \cdot (-1)^n \cdot x^{n+2}$$

για κάθε x με $|x| < 3/5$.

(B) Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά με χρήση του Θεωρήματος Παραγώγισης.

Αυτή η τεχνική εφαρμόζεται όταν το *αόριστο ολοκλήρωμα* της f αναπτύσσεται εύκολα σε δυναμοσειρά.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, $x \neq -1$.

Παίρνουμε τη συνάρτηση $g(x) = -\frac{1}{1+x}$ και παρατηρούμε ότι $g'(x) = +\frac{1}{(1+x)^2} = f(x)$, για $x \neq -1$. Με άλλα λόγια η g *είναι αόριστο ολοκλήρωμα* της f.

Η g αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά όπως έχουμε δει προηγουμένως:

$$g(x) = -\frac{1}{1+x} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot x^n$$

για κάθε $|x| < 1$.

Γνωρίζουμε ότι $f(x) = g'(x)$ και η g' γράφεται εύκολα σαν δυναμοσειρά χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών:

$$f(x) = g\,'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^{n+1} \cdot x^{n-1}, \quad |x| < 1.$$

(Γ) Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά με χρήση του Θεωρήματος Ολοκλήρωσης.

Αυτή η τεχνική εφαρμόζεται όταν η *παράγωγος* της f αναπτύσσεται εύκολα σε δυναμοσειρά.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την $f(x) = \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γνωρίζουμε ότι $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Εφαρμόζουμε τον τύπο της γεωμετρικής σειράς με $-x^2$ στην θέση του x. Προφανώς $|-x^2| < 1 \iff |x^2| < 1 \iff |x| < 1$. Οπότε για $|x| < 1$ έχουμε

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}.$$

Αφού $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ έχουμε ότι η $f = \arctan$ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Από την άλλη από το Θεώρημα Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c$$

οπότε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c$$

όπου c είναι μία σταθερά. Για τον υπολογισμό του c θέτουμε $x = 0$ (το κέντρο της δυναμοσειράς) και έχουμε

$$f(0) = \arctan(0) = 0, \quad f(0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{0^{2n+1}}{2n+1} + c = 0 + c = c.$$

Άρα $c = 0$ και

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1} \quad \text{για κάθε } x \text{ με } |x| < 1.$$

Δυναμοσειρές μερικών γνωστών συναρτήσεων

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad |x| \leq 1$$

Το Θεώρημα Taylor

Εξετάζουμε πότε μια $f\colon I \to \mathbb{R}$, όπου I ανοικτό διάστημα, αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά.

Μια τέτοια f πρέπει να είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

Επιπλέον ας γράψουμε $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$. Τότε $f(c) = a_0$.

Επιπλέον $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-1}$ και άρα

$$f'(c) = \text{ σταθερός όρος της δυναμοσειράς } = 1 \cdot a_1 = a_1.$$

Συνεχίζουμε $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-2}$ και άρα

$$f''(c) = \text{ σταθερός όρος της δυναμοσειράς } = 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 2! \cdot a_2.$$

Καταλήγουμε στο εξής.

Αν μια $f\colon I \to \mathbb{R}$, όπου I ανοικτό διάστημα, αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά κέντρου $c \in I$, τότε είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και για κάθε n ισχύει

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}}$$

όπου a_n είναι ο συντελεστής του $(x-c)^n$ στη δυναμοσειρά.

Ορισμός: (Πολυώνυμο Taylor)

Δίνεται ένα ανοικτό διάστημα I, ένα σημείο $c \in I$ και μια n-φορές παραγωγίσιμη $f\colon I \to \mathbb{R}$. Τότε το *πολυώνυμο Taylor τάξης n* της f στο σημείο c είναι το

$$P_n^{f,c}(x) = \frac{f^{(0)}(c)}{0!} + \frac{f^{(1)}(c)}{1!} \cdot (x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!} \cdot (x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n.$$

Δηλαδή $P_n^{f,c}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x-c)^k$ όπου τα $a_0, \ldots, a_n$ δίνονται από τον τύπο $a_k = \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$.

Το πολυώνυμο Taylor τάξης n συμβολίζεται πιο απλά με P_n όταν είναι σαφή τα f, c.

Το P_n δεν είναι απαραίτητα βαθμού n, γιατί μπορεί να έχουμε $a_n = 0$. Είναι βαθμού *το πολύ* n.

Ορισμός: (Σειρά Taylor-Maclaurin)

Θεωρούμε ένα ανοικτό διάστημα I, $c \in I$ και μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.
Η *σειρά Taylor της f στο c* είναι η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n.$$

Όταν $c = 0$ η σειρά Taylor ονομάζεται επίσης και *σειρά Maclaurin.*

Σύμφωνα με όσα είπαμε μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά κέντρου $c \in I$ αν και μόνο αν η f *ισούται με τη σειρά Taylor της στο c* για όλα τα $x \in I$.

Ισοδύναμα

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^k = \lim_{n\to\infty} P_n^{f,c}(x)$$

για κάθε $x \in I$. Με άλλα λόγια τα *πολυώνυμα Taylor προσεγγίζουν την f*,

$$\boxed{f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n^{f,c}(x), \quad x \in I.}$$

Θέτουμε

$$R_n^{f,c}(x) = f(x) - P_n^{f,c}(x).$$

για κάθε $x \in I$.
Το $R_n^{f,c}$ ονομάζεται *υπόλοιπο Taylor τάξης n* της f στο c.
Θέλουμε να ξέρουμε πότε έχουμε $\lim_{n\to\infty} R_n^{f,c}(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Τότε η f θα αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά.

Θεώρημα: (Taylor)

Θεωρούμε ένα ανοικτό διάστημα I, $c, x \in I$ *με* $c \neq x$ *και* $f : I \to \mathbb{R}$ *η οποία είναι* $(n+1)$*-φορές παραγωγίσιμη. Τότε υπάρχει* $\xi \in I$ *που βρίσκεται γνήσια ανάμεσα στο* c *και στο* x *για το οποίο ισχύει*

$$\boxed{R_n^{f,c}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-c)^{n+1}}$$

Το θεώρημα Taylor μας επιτρέπει να δώσουμε μια εκτίμηση για το υπόλοιπο Taylor. Αν για *παράδειγμα* ξέρουμε ότι $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq 1$ για κάθε $\xi \in I$ τότε $|R_n^{f,c}(x)| \leq \dfrac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Βρίσκοντας εκτιμήσεις για το υπόλοιπο Taylor μπορούμε να:

(α) ξέρουμε πόσο καλά προσεγγίζει το $P_n^{f,c}$ την f στο x, και

(β) εξετάσουμε αν η f ισούται με τη δυναμοσειρά Taylor της.

Παράδειγμα χρήσης του Θεωρήματος Taylor

Να βρεθεί μια προσέγγιση του αριθμού $\sqrt{e}$ με ακρίβεια καλύτερη από 10^{-2}.

Γνωρίζουμε ότι $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με P_n το πολυώνυμο Taylor της $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, στο 0 και με R_n το αντίστοιχο υπόλοιπο Taylor.

Τότε $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. (Αυτό συμβαίνει γιατί οι συντελεστές στο πολυώνυμο Taylor ισούνται με τους συντελεστές της δυναμοσειράς και είναι ίσοι με $f^{(n)}(0)/n!$).

Παρατηρούμε επίσης ότι $\sqrt{e} = e^{1/2}$, άρα

$$|\sqrt{e} - P_n(1/2)| = |f(1/2) - P_n(1/2)| = |R_n(1/2)|.$$

Επομένως αν βρούμε ένα n με $|R_n(1/2)| < 10^{-2}$ τότε το $P_n(1/2)$ είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{e}$ που είναι καλύτερη από 10^{-2}.

Από το Θεώρημα Taylor υπάρχει $\xi \in (0, 1/2)$ με

$$R_n(1/2) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (1/2 - 0)^{n+1} > 0.$$

Αφού $f' = f$ έχουμε $f^{(n+1)}(\xi) = e^{\xi} < e^{1/2} < e^{1} < 3$. Άρα

$$R_n(1/2) \leq \frac{3}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Δοκιμάζουμε $n = 3$:

$$\frac{3}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} < \frac{1}{100} = 10^{-2}.$$

Άρα $|R_3(1/2)| < 10^{-2}$, δηλαδή το $n = 3$ είναι μια κατάλληλη επιλογή. Η προσέγγιση είναι

$$P_3(1/2) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3 \cdot 6} \ .$$