Μάθημα 1ο

Εισαγωγή στην Αναλυτική Γεωμετρία

1 Εισαγωγή

Ως Γεωμετρία ορίζουμε τον κλάδο της ανθρώπινης γνώσης που έχει ως αντικείμενο την περιγραφή του χώρου και των σχημάτων των αντικειμένων που βρίσκονται στο χώρο.

Όταν λέμε "περιγραφή του χώρου" εννοούμε το πως αντιλαμβανόμαστε το χώρο με την αίσθηση της όρασης.

Με την όραση αντιλαμβανόμαστε έννοιες όπως ύψος, πλάτος, και μήκος. Η αντίληψη αυτή μας οδήγησε στην υπόθεση ότι ο χώρος στον οποίο ζούμε - και υπάρχουν και τα διάφορα αντικείμενα - είναι τρισδιάστατος. Τον χώρο όπως τον αντιλαμβανόμαστε με την αίσθηση της όρασης τον ονομάζουμε *εποπτικό χώρο* E^3.

Τα στοιχεία του χώρου αυτού τα ονομάζουμε *σημεία και στον χώρο αυτό φτιάχνουμε τα γεωμετρικά αντικείμενα.*

Όταν λέμε "περιγραφή των σχημάτων των αντικειμένων" εννοούμε την μελέτη των σχημάτων με τρόπο εμπειρικό.

Η περιγραφή των σχημάτων στην Γεωμετρία αφορά στην

α) Εύρεση του σχήματος του αντικειμένου (πχ τετράγωνο)
β) Εύρεση ιδιοτήτων του σχήματος του αντικειμένου (πχ οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα)
γ) Σχέσεις μεταξύ διαφόρων σχημάτων (τετράγωνο και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) οι οποίες αποτυπώνονται με τις διαφορές τους και τις ομοιότητές τους (το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δεν έχει ίσες διαδοχικές πλευρές όπως το τετράγωνο, και τα δύο σχήματα έχουν όλες τις γωνίες ορθές).

Η περιγραφή αυτή ουσιαστικώς είναι "ποσοτική" και γίνεται με την χρήση του διαβαθμισμένου κανόνα και του μοιρογνωμονίου.

Ευκλείδεια Γεωμετρία: περιγραφή του χώρου και των σχημάτων των αντικειμένων που βρίσκονται στο χώρο μέσω

α) Βασικών αξιωμάτων (βασικές έννοιες, σημείο, ευθεία, επίπεδο, γωνία, αξίωμα παραλληλίας κλπ)
β) Θεωρημάτων (Προτάσεις που αποδεικνύονται μέσω της χρήσης των αξιωμάτων)
γ) Πορίσματα (ή και Λήμματα προτάσεις που έπονται ως συνέπειες των θεωρημάτων)

Πετυχαίνουμε να βρίσκουμε διάφορες ιδιότητες των σχημάτων οι οποίες δεν μπορούν να βρεθούν από παρατήρηση του σχήματος ούτε από μετρήσεις.
Στην συνέχεια γενικεύουμε τα συμπεράσματα που βγάζουμε.

Ο κλάδος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ο οποίος παρέχει ποσοτικές σχέσεις μεταξύ των διαφόρων γεωμετρικών μεγεθών ονομάζεται Μετρική Γεωμετρία. Παράδειγμα το Πυθαγόρειο Θεώρημα το α' και το β΄ θεώρημα των διαμέσων, οι γενικεύσεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος για τυχαία τρίγωνα είναι θεωρήματα που αφορούν στην Μετρική Γεωμετρία.
Δηλαδή η Μετρική Γεωμετρία μας παρέχει σχέσεις για να λύνουμε γεωμετρικά προβλήματα μέσω αλγεβρικών εξισώσεων.

Επί πλέον μέσω της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ορίζεται και η έννοια του μήκους ευθυγράμμου τμήματος και της απόστασης δύο σημείων Α και Β ως το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Η Αναλυτική Γεωμετρία είναι ο κλάδος της Γεωμετρίας όπου τα γεωμετρικά προβλήματα λύνονται μέσω επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων. Όπως όμως έχουμε δει αυτό δεν είναι κάτι καινούργιο αφού και η Μετρική Γεωμετρία λύνει τα προβλήματα με τον ίδιο τρόπο.

Η διαφορά της Αναλυτικής Γεωμετρίας από την Μετρική Γεωμετρία είναι ότι για να καταστρώσουμε αλγεβρικές εξισώσεις χρησιμοποιούμε δύο επί πλέον έννοιες: την έννοια του *προσανατολισμού* και την έννοια του *συστήματος αξόνων.*

Η έννοια του προσανατολισμού έχει να κάνει με, ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες και γωνίες.

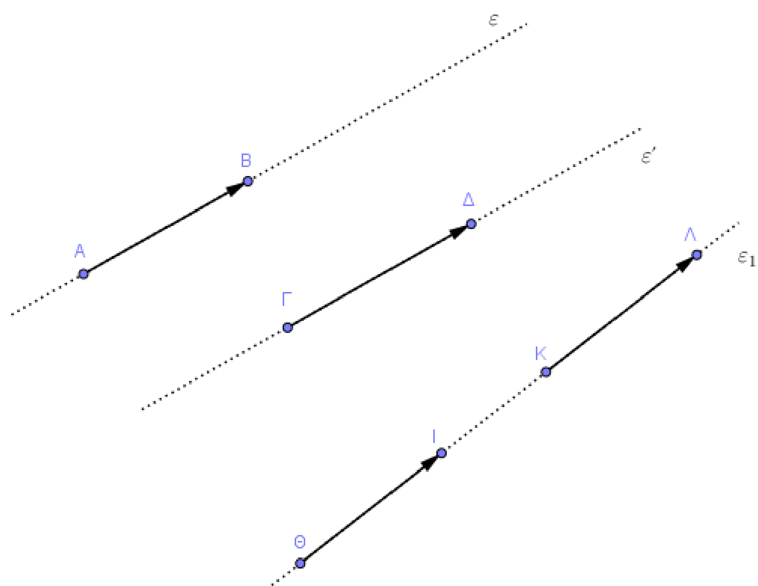
Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στον εποπτικό χώρο. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ λέγεται προσανατολισμένο όταν ορίσουμε ότι η αρχή του είναι το σημείο Α και πέρας το σημείο Β.

Η ευθεία στην οποία ανήκει λέγεται φορέας του, και έχει ως διεύθυνση την διεύθυνση του φορέα του.
Η φορά του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται θετική όταν σαν αρχή θέσουμε το σημείο Α και πέρας το σημείο Β.
Κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα στον εποπτικό χώρο μπορεί να μετατοπιστεί παραλλήλως, δηλαδή για ένα τυχαίο σημείο Γ υπάρχει ένα μοναδικό σημείο Δ τέτοιο ώστε
α) ΓΔ = ΑΒ.

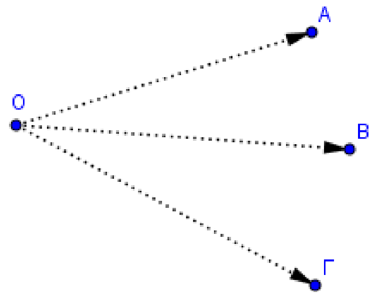
β) το Γ ορίζεται ως αρχή και το σημείο Δ ως πέρας του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ

γ) Οι φορείς των ΑΒ και ΓΔ να είναι παράλληλοι ή να συμπίπτουν.

Ονομάζουμε εφαρμοστό διάνυσμα ΑΒ ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ του εποπτικού χώρου E^3.



Έστω Ο ένα σημείο του εποπτικού χώρου το οποίο ονομάζουμε «σταθερό». Έστω και ένα τυχαίο σημείο Α του εποπτικού χώρου. Το εφαρμοστό διάνυσμα ΟΑ ονομάζεται διάνυσμα θέσης του σημείου Α.



Εφ' όσον το σημείο Ο είναι σταθερό τότε σε κάθε τυχαίο σημείο Μ του εποπτικού χώρου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διάνυσμα θέσης ΟΜ και αντιστρόφως. Η 1 – 1 και επί αντιστοιχία που δημιουργήσαμε θα μας χρησιμεύσει λίγο παρακάτω.

Έστω το σύνολο

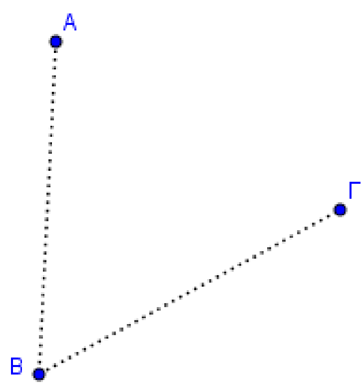
$$\delta_{AB} = \{\Gamma\Delta : \Gamma\Delta // AB\,, \Gamma\Delta = AB\} \tag{1.1}$$

Το παραπάνω σύνολο είναι μια κλάση ισοδυναμίας του διανύσματος ΑΒ *και ονομάζεται (ελεύθερο) διάνυσμα ΑΒ.*

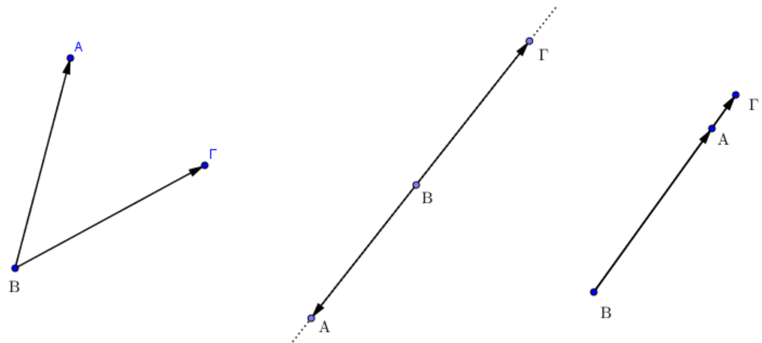
Κάθε (ελεύθερο) διάνυσμα μπορεί να παρασταθεί από οποιοδήποτε εφαρμοστό διάνυσμα που ανήκει μέσα στην κλάση.

Έστω τρία σημεία Α, Β, Γ του εποπτικού χώρου. Οι ημιευθείες ΒΑ και ΒΓ σχηματίζουν μια οξεία γωνία.

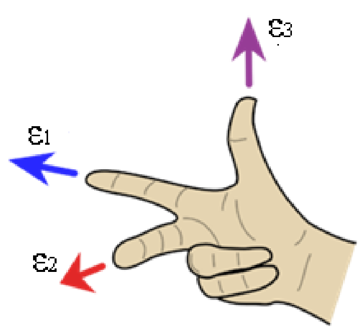
Ορίζουμε ως θετική φορά την φορά διαγραφής της γωνίας ως αυτή που είναι αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου.



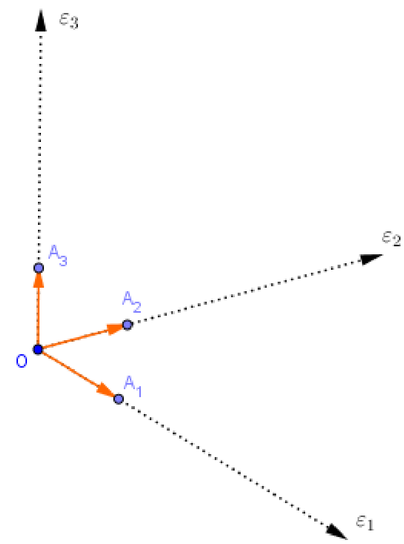
Το διάστημα τιμών της γωνίας αυτής είναι το [-π, π]. Εάν τα διανύσματα ΒΓ και ΒΑ είναι ομόρροπα τότε η τιμή της είναι ίση με το μηδέν.
Όταν τα διανύσματα ΒΓ και ΒΑ είναι αντίρροπα τότε η τιμή της ισούται με π ή –π αναλόγως με τι φορά την διαγράφουμε.
Όταν τα διανύσματα ΒΓ και ΒΑ δεν είναι συγραμμικά τότε η τιμή της ισούται με κάποια τιμή μέσα στο διάστημα [-π, π] η οποία θα είναι διάφορη του 0, π και –π.



Στην συνέχεια εισάγουμε την έννοια του συστήματος αξόνων. Έστω σημείο Ο του εποπτικού χώρου. Θεωρούμε τρεις ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ οι οποίες περνούν από το σημείο Ο και είναι ανά δύο κάθετες.
Βαθμονομούμε τις τρεις ευθείες επιλέγοντας τρία σημεία A_1, A_2, και A_3 τέτοια ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα OA_1, OA_2 και OA_3 να είναι ισομήκη. Το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων αυτών λαμβάνεται ίσο με την μονάδα.
Τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα (εφαρμοστά διανύσματα) OA_1, OA_2 και OA_3 ορίζουμε ότι είναι προσανατολισμένα θετικά. Οι ημιευθείες OA_1, OA_2 και OA_3 ορίζουμε ότι είναι προσανατολισμένες θετικά.
Οι βαθμονομημένες ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$ ονομάζονται άξονες.
Υποθέτουμε ότι η γωνία A_1OA_2 ότι διαγράφεται θετικά και ότι η σειρά των αξόνων $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ είναι αριστερόστροφη (δηλαδή σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού αποτελούν ένα δεξιόστροφο σύστημα αξόνων).

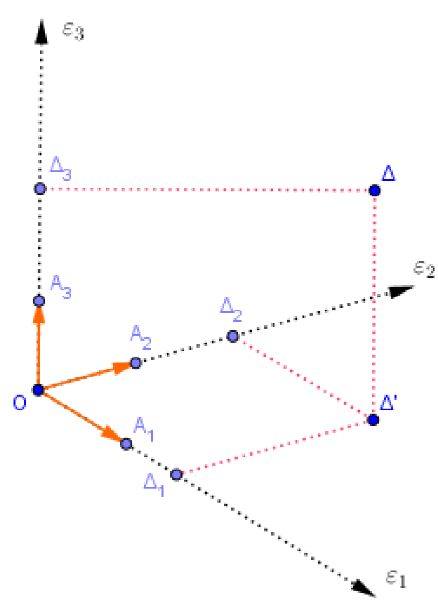


Με τις παραπάνω προϋποθέσεις το σύνολο των παραπάνω ευθειών ονομάζεται Καρτεσιανό σύστημα αξόνων και τα εφαρμοστά διανύσματα μια δεξιόστροφη τριάδα.



Έστω ένα τυχαίο σημείο Δ του εποπτικού χώρου και το διάνυσμα θέσης $\overline{\text{ΟΔ}}$.
Προβάλλουμε το σημείο Δ στους άξονες ε_1, ε_2, και ε_3. Έστω Δ_1, Δ_2, Δ_3 οι προβολές του στους άξονες αυτούς αντίστοιχα και

$$O\Delta_1 = \delta_1 \text{ΟΑ}_1 \ , \ \ \text{Ο}\Delta_2 = \delta_2 \text{ΟΑ}_2 \ , \ \ \text{Ο}\Delta_3 = \delta_3 \text{ΟΑ}_3 \qquad (1.2)$$



Έστω ο διανυσματικός χώρος

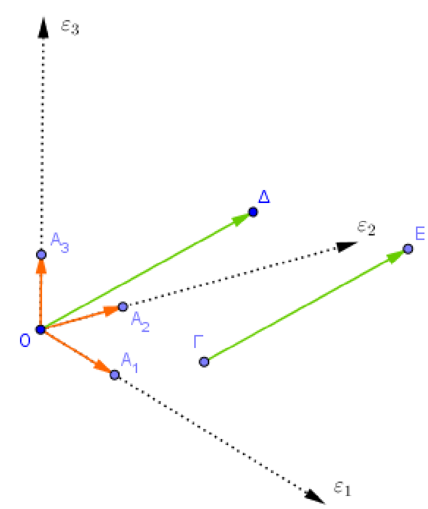
$$\Re^3 = \{(x, y, z) : x \in \Re, y \in \Re, z \in \Re\} \quad (1.3)$$

με την συνήθη βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f : E^3 \to \Re^3 : \Delta \to f(\Delta) = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$$

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση αυτή είναι 1 - 1 και επί του R^3.
Αυτό σημαίνει ότι κάθε σημείο του εποπτικού χώρου αντιστοιχείται σε μια μοναδική τριάδα αριθμών του R^3 και αντιστρόφως κάθε τριάδα αριθμών του R^3 αντιστοιχείται σε ένα μοναδικό σημείο του εποπτικού χώρου. Άρα ο E^3 και ο R^3 ταυτίζονται.
Επομένως
α) Η τριάδα $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ονομάζονται Καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου Δ.
β) Κάθε σημείο Δ του εποπτικού χώρου αντιστοιχείται σε ένα διάνυσμα το οποίο είναι το διάνυσμα ΟΔ. Το διάνυσμα αυτό έχει συντεταγμένες $(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ - $(0, 0, 0)$= $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.
γ) Έστω ΓΕ μια παράλληλη μετατόπιση του διανύσματος ΟΔ. Τότε εάν οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ το σημείο Ε έχει συντεταγμένες $(\gamma_1 + \delta_1, \gamma_2 + \delta_2, \gamma_3 + \delta_3)$.
δ) Οι συντεταγμένες του (εφαρμοστού) διανύσματος ΓΕ είναι

$$(\gamma_1 + \delta_1 - \gamma_1, \gamma_2 + \delta_2 - \gamma_2, \gamma_3 + \delta_3 - \gamma_3) =(\delta_1, \delta_2, \delta_3).$$



……………………..