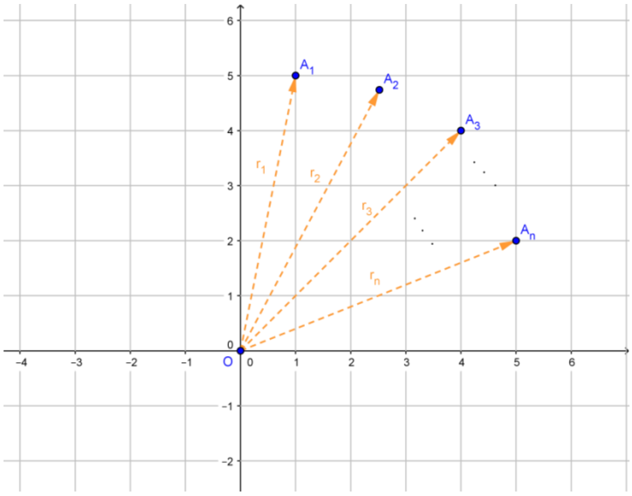
<u>Παραδείγματα στο επίπεδο και ένα στο χώρο</u>

<u>Παράδειγμα Πρώτο</u>

Έστω n το πλήθος διανύσματα $\bar{r}_1 , \bar{r}_2 , \bar{r}_3 , \dots , \bar{r}_n$ του επιπέδου.



Ονομάζουμε κεντροειδές (centroid) ή διάνυσμα μέσης θέσεως των διανυσμάτων $\bar{r}_1 , \bar{r}_2 , \bar{r}_3 , \dots , \bar{r}_n$ το διάνυσμα

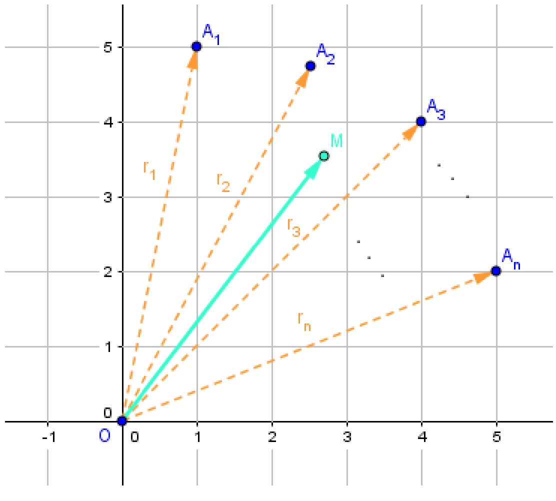
$$\bar{r}_{mp} = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 + \dots + \bar{r}_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i$$

Αν

$$\bar{r}_1 = (x_1, y_1) \quad , \quad \bar{r}_2 = (x_2, y_2) \quad , \quad ..... \quad , \quad \bar{r}_n = (x_n, y_n)$$

τότε ο παραπάνω τύπος γίνεται

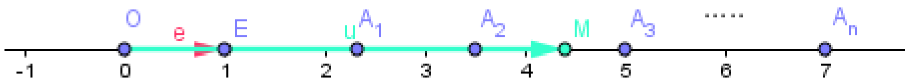
$$\bar{r}_{mp} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n \ , \ y_1 + y_2 + \dots y_n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} y_i \right)$$



Ονομάζουμε μέτρο του διανύσματος μέσης θέσεως των διανυσμάτων $\bar{r}_1 , \bar{r}_2 , \bar{r}_3 , \dots , \bar{r}_n$ το μέγεθος

$$|\bar{r}_{mp}| = \frac{1}{n}|\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 + \dots + \bar{r}_n| = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2}$$

Στην περίπτωση του διανυσματικού χώρου R τα παραπάνω γίνονται ως εξής



$$\bar{r}_{mp} = \frac{1}{n}(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_1) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\bar{e}_1$$

Η τετμημένη

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

έχει σπουδαίο ρόλο στις εφαρμογές.

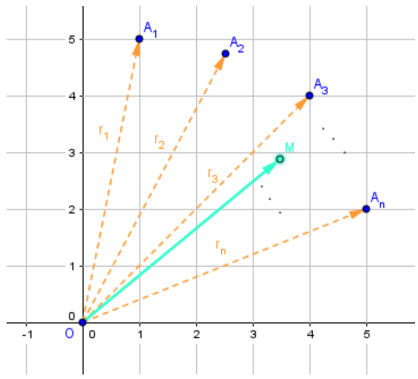
Παράδειγμα Δεύτερο

Έστω n το πλήθος διανύσματα $\bar{r}_1 , \bar{r}_2 , \bar{r}_3 , \dots , \bar{r}_n$ του επιπέδου και n το πλήθος πραγματικοί αριθμοί p_1, p_2, p_3, … ,p_n.

Ονομάζουμε διάνυσμα μέσης θέσεως των διανυσμάτων $\bar{r}_1 , \bar{r}_2 , \bar{r}_3 , \dots , \bar{r}_n$ ως προς τους πραγματικούς αριθμούς p_1, p_2, p_3, … ,p_n το διάνυσμα

$$\bar{r}_{mp}^{p_i} = \frac{p_1\bar{r}_1 + p_2\bar{r}_2 + p_3\bar{r}_3 + \dots + p_n\bar{r}_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} =$$

$$= \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \ , \ p_1y_1 + p_2y_2 + \dots + p_ny_n)$$



Ο περιορισμός για τον παραπάνω ορισμό είναι

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \neq 0$$

Με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε το ίδιο διάνυσμα στον διανυσματικό χώρο R δηλαδή

$$\bar{r}_{mp}^{p_i} = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 + \ldots + p_n r_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}\bar{e}_1 = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n)\bar{e}_1$$

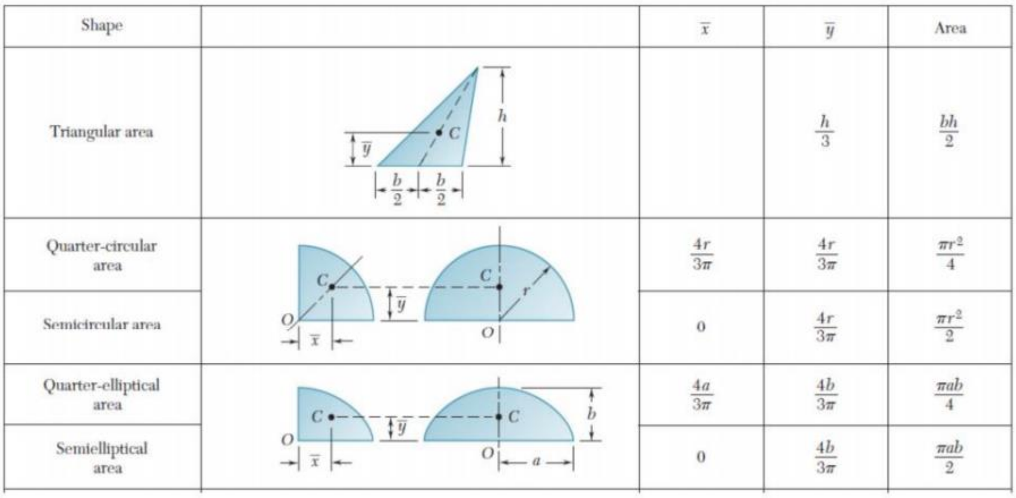
Η τετμημένη του παραπάνω διανύσματος

$$\frac{1}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n)$$

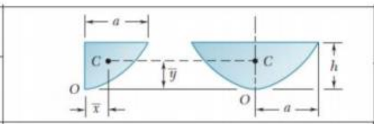
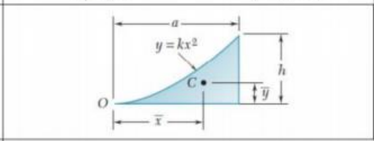
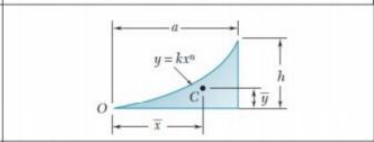
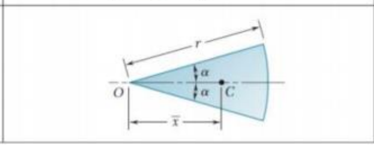
έχει σπουδαίο ρόλο στις εφαρμογές.

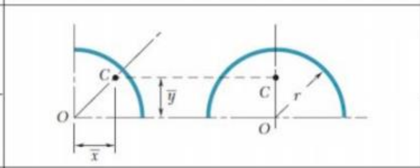
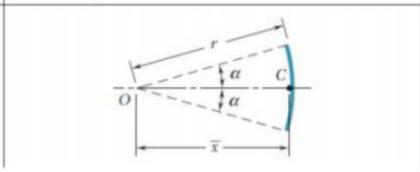
Δεχόμαστε (χωρίς απόδειξη) ότι: Το διάνυσμα θέσεως των διανυσμάτων $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \ldots, \bar{r}_n$ δεν εξαρτάται από το σημείο Ο.

Παρακάτω παρουσιάζουμε κάποια κεντροειδή από διάφορα σχήματα



Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Triangular area			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Quarter-elliptical area		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Semielliptical area		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$

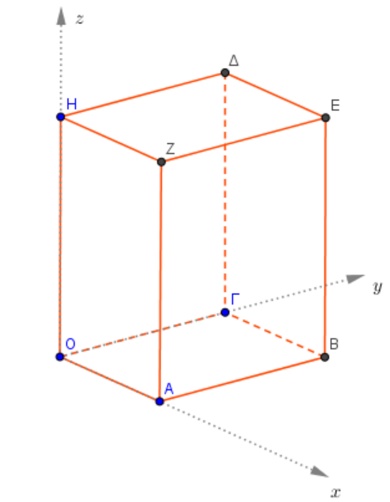
Semiparabolic area		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Parabolic spandrel		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
General spandrel		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Circular sector		$\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Length
Quarter-circular arc		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semicircular arc		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arc of circle		$\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Τα κεντροειδή έχουν σχέση με το κέντρο μάζας και το κέντρο βάρους ενός σώματος.

Παράδειγμα Τρίτο

Δίδεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο όπου οι πλευρές του πάνω στους άξονες έχουν συντεταγμένες $(x_0, 0, 0)$, $(0, y_0, 0)$, και $(0, 0, z_0)$. Να βρεθεί ο όγκος του παραλληλεπίπεδου και η μεταβολή του όγκου του όταν οι πλευρές στους άξονες x, y μεταβληθούν κατά $\delta y > 0$, $\delta x > 0$ αντίστοιχα.



Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε το σχήμα του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. Από τα δεδομένα έχουμε ότι

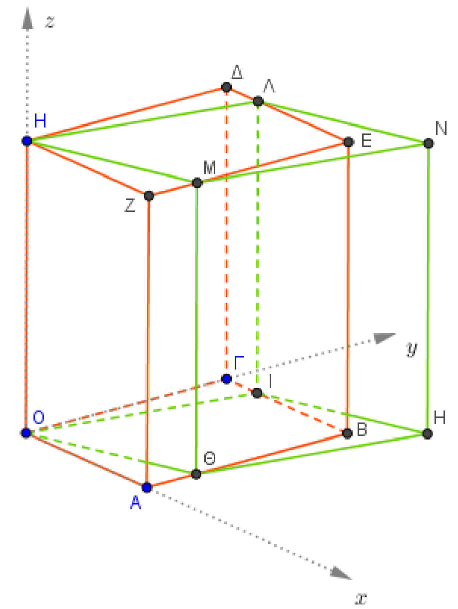
$$\overline{OA}=(x_0,0,0) \quad , \quad \overline{OB}=(0,y_0,0) \quad , \quad \overline{O\Gamma}=(0,0,z_0)$$

Επομένως ο όγκος του παραλληλεπιπέδου ισούται με

$$V_{\alpha\rho\chi}=\left|[\overline{OA},\overline{OB},\overline{O\Gamma}]\right|=\left\|\begin{matrix} x_0 & 0 & 0 \\ 0 & y_0 & 0 \\ 0 & 0 & z_0 \end{matrix}\right\|=\left|x_0y_0z_0\right|=x_0y_0z_0$$

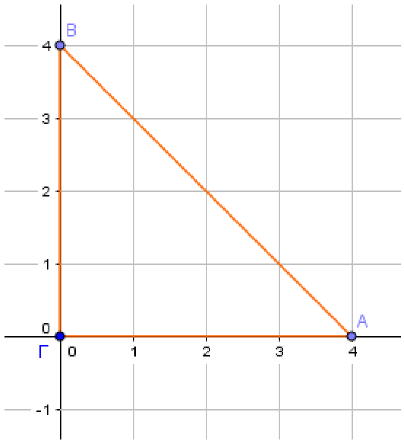
Έστω ότι έχουμε μια μεταβολή κατά δy στην πλευρά OA και μια μεταβολή δx στην πλευρά ΟΓ . Τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου θα ισούται με

$$V_{\tau\varepsilon\lambda}=\left|[\overline{OA},\overline{OB},\overline{O\Gamma}]\right|=\left\|\begin{matrix} x_0 & \delta y & 0 \\ \delta x & y_0 & 0 \\ 0 & 0 & z_0 \end{matrix}\right\|=\left|x_0y_0z_0-z_0\delta x\delta y\right|=x_0y_0z_0-z_0\delta x\delta y$$

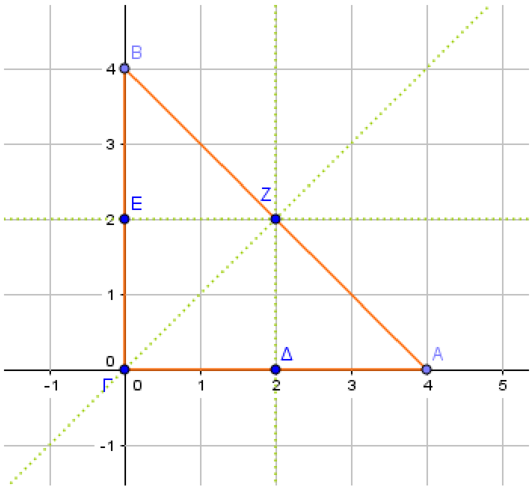


Παράδειγμα Τέταρτο

Δίδεται ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με μήκη ισοσκελών πλευρών ίσο με 4. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του.



Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του.



Οι εξισώσεις των μεσοκαθέτων των δύο ισοσκελών πλευρών είναι

$$x = 2 \Leftrightarrow x + 0y - 2 = 0$$
$$y = 2 \Leftrightarrow 0x + y - 2 = 0$$

Για να βρούμε την εξίσωση της τρίτης μεσοκαθέτου θα θυμηθούμε την σχέση

$$\overline{ON} = \frac{n\overline{OA} + m\overline{OB}}{m+n}$$

η οποία μας δίδει τις συντεταγμένες ενός σημείου Ν πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα που θέλουμε να το διαιρέσουμε σε δύο ευθύγραμμα τμήματα λόγου m : n.

Εδώ η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ (υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου) το τέμνει στο μέσον του. Εάν Ζ είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ τότε τα τμήματα ΑΖ και ΖΒ θα είναι ίσα άρα m = n = 1.

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Ζ είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος ΑΖ

$$\overline{AZ} = \frac{\overline{AB} + \overline{A\Gamma}}{2} = \frac{(4,0)+(0,4)}{2} = \frac{(4,4)}{2} = (2,2)$$

Επομένως η εξίσωση της μεσοκαθέτου είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$$

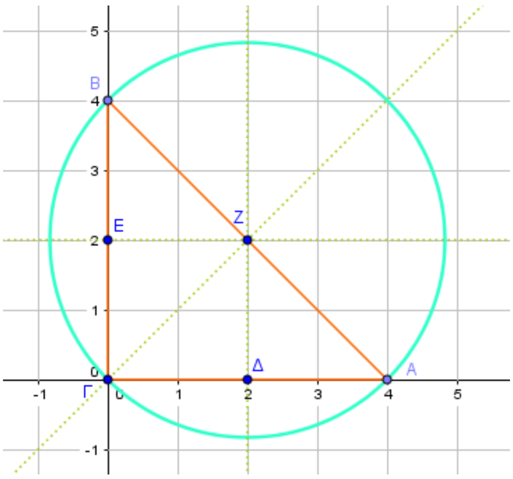
Το σημείο τομής των τριών μεσοκαθέτων με εξισώσεις

$$\begin{aligned} x + 0y - 2 &= 0 \\ 0x + y - 2 &= 0 \\ x - y + 0 &= 0 \end{aligned}$$

προκύπτει από την λύση του παραπάνω συστήματος.

Το σημείο με συντεταγμένες (2, 2) είναι λύση του συστήματος άρα το σημείο τομής των μεσοκαθέτων είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο αυτό θα είναι και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου. Επειδή ο κύκλος είναι περιγεγραμμένος σημαίνει ότι οι κορυφές του τριγώνου θα είναι πάνω στην περιφέρεια του και θα ισαπέχουν από το κέντρο του. Επομένως η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι

$$R = d(\Gamma, Z) = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



Παράδειγμα Πέμπτο

Δίδεται ένα σύνολο n το πλήθος ευθειών με εξισώσεις

$$A_i x + B_i y + \Gamma_i = 0 \quad , \quad i = 1,2,3,\ldots,n$$

Να γραφεί η συνθήκη ώστε οι παραπάνω ευθείες να ανήκουν σε μια δέσμη ευθειών.

Η διερεύνηση του προβλήματος αυτού βασίζεται στην παρακάτω πρόταση

Τρεις ευθείες με εξισώσεις

$$A_1x+B_1y+\Gamma_1=0 \quad , \quad A_2x+B_2y+\Gamma_2=0 \quad , \quad A_3x+B_3y+\Gamma_3=0$$

διέρχονται από ένα κοινό σημείο εάν και μόνον εάν ισχύει ότι

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

και μια από τις ελάσσονες ορίζουσες των στοιχείων Γ_1, Γ_2, και Γ_3 είναι διάφορη του μηδενός.

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι n το πλήθος ευθείες να διέρχονται από το ίδιο σημείο είναι

$$\sum_{i=1}^{n-2} \left\| \begin{matrix} A_i & B_i & \Gamma_i \\ A_{i+1} & B_{i+1} & \Gamma_{i+1} \\ A_{i+2} & B_{i+2} & \Gamma_{i+2} \end{matrix} \right\| = 0 \quad , \quad |\Gamma_i|+|\Gamma_{i+1}|+|\Gamma_{i+2}| \neq 0$$

Έστω οι ευθείες με εξισώσεις

$$x+y-2=0 \ \ , \ \ 2x-3y+1=0 \ \ , \ \ x-2y+1=0 \ \ , \ \ 8x-7y-1=0 \ , \ 5x+2y-7=0$$

Οι ευθείες αυτές διέρχονται από ένα κοινό σημείο γιατί

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 8 & -7 & -1 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & -7 & -1 \\ 5 & 2 & -7 \end{matrix} \right\| = (2+3-5)+(9-10+1)+(51+12-63)=0$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = 9$$

<u>Παράδειγμα Έκτο</u>

Δίδονται n το πλήθος σημεία του επιπέδου με συντεταγμένες (x_i, y_i) , i = 1,2,…,n. Να γραφεί η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων προκειμένου αυτά να είναι συνευθειακά.

Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν είναι ο μηδενισμός της σχέσης του Meinster

$$E = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n-1} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n-1} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}\right| = 0$$

με την διαφορά ότι εδώ το άθροισμα σταματά όταν i = n – 1.

…………………….