

## Μάθημα 6°

### Ευθεία στο χώρο και επίπεδα

Μια ευθεία στο χώρο ορίζεται όπως πριν δηλαδή είτε γνωρίζουμε δύο σημεία τα οποία ανήκουν σε αυτήν είτε ένα σημείο και ένα διάνυσμα το οποίο είναι παράλληλο στην ζητούμενη ευθεία

Για την πρώτη περίπτωση έστω δύο σημεία P και Q με Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$(x_p, y_p, z_p), (x_Q, y_Q, z_Q)$$

Η ευθεία που περνά από το σημεία P και Q έχει διανυσματική εξίσωση

$$\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x_p + t(x_Q - x_p), y_p + t(y_Q - y_p), z_p + t(z_Q - z_p))$$

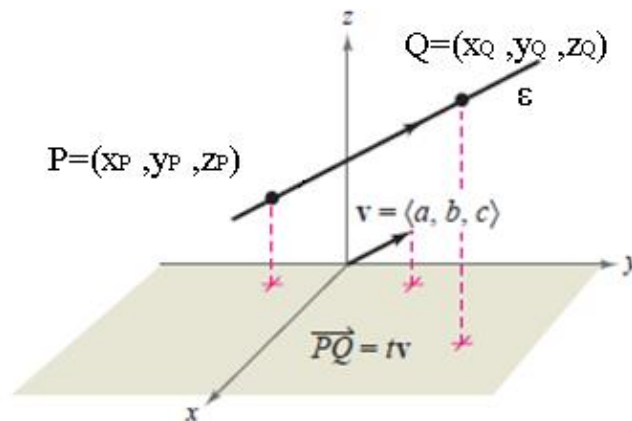
Για την δεύτερη περίπτωση έστω

$$P = (x_p, y_p, z_p)$$

$$\bar{v} = (a, b, c)$$

Τότε η διανυσματική εξίσωση της ευθείας είναι

$$\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}(t) = (x_p, y_p, z_p) + t\bar{v} = (x(t), y(t), z(t)) = (x_p + ta, y_p + tb, z_p + tc)$$



Όπως και στην περίπτωση του επιπέδου έτσι και εδώ η διανυσματική συνάρτηση της ευθείας μπορεί να πάρει τις παρακάτω μορφές

Παραμετρική

$$x(t) \equiv x = x_1 + ta$$

$$y(t) \equiv y = y_1 + tb$$

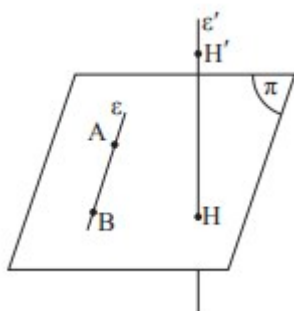
$$z(t) \equiv z = z_1 + tc$$

Συμμετρική

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Όπως είδαμε πριν δύο ευθείες στο επίπεδο μπορεί να τέμνονται, να είναι παράλληλες ή να συμπίπτουν. Στον τρισδιάστατο χώρο δύο ευθείες πάλι μπορούν να τέμνονται, να συμπίπτουν ή να είναι παράλληλες αλλά υπάρχει και άλλη μια δυνατότητα.

Δύο ευθείες στο τρισδιάστατο χώρο ονομάζονται *ασύμβατες* όταν δεν είναι παράλληλες και δεν έχουν κοινό σημείο.



### Ευθεία στο χώρο τυπολόγιο

Θα παρουσιάσουμε ένα χρήσιμο τυπολόγιο που θα αφορά στην ευθεία ως γεωμετρικό αντικείμενο του τρισδιάστατου χώρου.

#### *Γωνία μεταξύ δύο ευθειών*

Θεωρούμε ένα σημείο  $O$  του τρισδιάστατου χώρου και ένα Καρτεσιανό σύστημα αξόνων  $x, y$  και  $z$  με κέντρο το σημείο αυτό. Είδαμε ότι για μια ευθεία στο χώρο μπορούμε να προσδιορίσουμε την διανυσματική της εξίσωση εάν γνωρίζουμε δύο σημεία που ανήκουν σε αυτήν ή ένα σημείο το οποίο ανήκει σε αυτήν και ένα διάνυσμα στο οποίο είναι παράλληλο.

Έστω δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  του τρισδιάστατου χώρου με διανυσματικές εξισώσεις

$$\bar{r}_1 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = (x_A + ta_1, y_A + tb_1, z_A + tc_1)$$

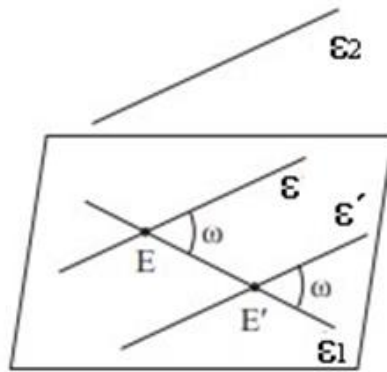
$$\bar{r}_2 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = (x_B + ta_2, y_B + tb_2, z_B + tc_2)$$

Δηλαδή η ευθεία  $\varepsilon_1$  περνά από το σημείο  $A$  και είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $(a_1, b_1, c_1)$  ενώ η ευθεία  $\varepsilon_2$  περνά από το σημείο  $B$  και είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $(a_2, b_2, c_2)$ .

Εάν οι ευθείες συμπίπτουν ή είναι παράλληλες τότε η γωνία μεταξύ τους είναι μηδενική. Εάν τέμνονται τότε είναι συνεπίπεδες και η γωνία μεταξύ τους ορίζεται όπως και στην περίπτωση του επιπέδου δηλαδή

$$\omega = \text{τοξσυν} \left( \frac{\langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \rangle}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right)$$

Μένει η περίπτωση όπου οι δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι ασύμβατες. Στην περίπτωση αυτή από τυχαίο σημείο της ευθείας  $\varepsilon_1$  φέρνουμε μια ευθεία  $\varepsilon$  η οποία είναι παράλληλη στην  $\varepsilon_2$ .



Ορίζουμε ως γωνία των δύο ασύμβατων ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  την γωνία  $\omega$  μεταξύ των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\varepsilon_1$ .

Η γωνία  $\omega$  ορίζεται με τον πιο πάνω τύπο.

*Απόσταση σημείου από ευθεία*

Θεωρούμε μια ευθεία  $\varepsilon$  με διανυσματική εξίσωση

$$\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}(t) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

και ένα σημείο  $A$  με συντεταγμένες  $(x_A, y_A, z_A)$ . Η απόσταση του σημείου  $A$  από την ευθεία  $\varepsilon$  ισούται με

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|(x_A - x_0, y_A - y_0, z_A - z_0) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

*Κοινή κάθετος δύο ευθειών*

Έστω δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  του τρισδιάστατου χώρου με διανυσματικές εξισώσεις

$$\bar{r}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = (x_A + ta_1, y_A + tb_1, z_A + tc_1)$$

$$\bar{r}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = (x_B + ta_2, y_B + tb_2, z_B + tc_2)$$

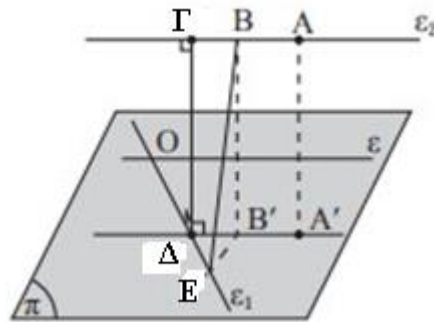
Η κοινή κάθετος μεταξύ δύο ασύμβατων ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  έχει δύο σημεία τομής με τις ευθείες αυτές. Έστω  $\Gamma$  το σημείο τομής με την  $\varepsilon_1$  και  $\Delta$  το σημείο τομής με την  $\varepsilon_2$ . Οι συντεταγμένες των δύο σημείων είναι

$$(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma) = (x_A, y_A, z_A) + \frac{[(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A), (a_2, b_2, c_2), (a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2)]}{|(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2)|^2} (a_1, b_1, c_1)$$

$$(x_\Delta, y_\Delta, z_\Delta) = (x_B, y_B, z_B) + \frac{[(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A), (a_1, b_1, c_1), (a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2)]}{|(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2)|^2} (a_2, b_2, c_2)$$

Η εξίσωση της κοινής καθέτου των δύο ασύμβατων ευθειών είναι

$$\bar{r}_k : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}_k(t) = (x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma) + t(x_\Delta - x_\Gamma, y_\Delta - y_\Gamma, z_\Delta - z_\Gamma)$$



Απόσταση μεταξύ δύο ευθειών

Έστω δύο ασύμβατες ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  του τρισδιάστατου χώρου με διανυσματικές εξισώσεις

$$\bar{r}_1 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = (x_A + ta_1, y_A + tb_1, z_A + tc_1)$$

$$\bar{r}_2 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = (x_B + ta_2, y_B + tb_2, z_B + tc_2)$$

Ορίζουμε ως απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος το οποίο ανήκει πάνω στην κοινή κάθετο των δύο ευθειών.

Το μήκος αυτό είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο ευθειών και ισούται με

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right|}{|(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2)|}$$

Ειδική περίπτωση: Εάν οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  ανήκουν στο επίπεδο  $xy$  και είναι παράλληλες δηλαδή έχουν αλγεβρικές εξισώσεις

$$y = a_1 + bx$$

$$y = a_2 + bx$$

τότε η απόστασή τους ισούται με

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|a_2 - a_1|}{\sqrt{1 + b^2}}$$

Εάν οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλες στο χώρο, τότε  $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$ . Εάν η ευθεία  $\varepsilon_1$  διέρχεται από το σημείο A με Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x_A, y_A, z_A)$  και η ευθεία  $\varepsilon_2$  διέρχεται από το σημείο B με Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x_B, y_B, z_B)$  τότε η απόστασή τους ισούται με

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|(x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B) \times (a_1, b_1, c_1)|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

*Προβολή σημείου πάνω σε ευθεία*

Θεωρούμε μια ευθεία  $\varepsilon$  με διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \vec{r}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

και ένα σημείο  $A = (x_A, y_A, z_A)$  που δεν ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$ . Θέλουμε να βρούμε την προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία  $\varepsilon$ .

Έστω B το σημείο που είναι η προβολή του σημείου A. Τότε το διάνυσμα AB θα είναι κάθετο στην ευθεία  $\varepsilon$  δηλαδή θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \langle (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A), (a, b, c) \rangle &= 0 \Rightarrow a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow ax_B + by_B + cz_B &= ax_A + by_A + cz_A \end{aligned}$$

Το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία  $\varepsilon$  επομένως υπάρχει τιμή  $t_0$  της παραμέτρου  $t$  τέτοια ώστε

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_0, y_0, z_0) + t_0(a, b, c) = \vec{r}(t_0)$$

Δηλαδή έχουμε και την σχέση

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_0 + at_0, y_0 + bt_0, z_0 + ct_0)$$

Άρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ax_B + by_B + cz_B &= ax_A + by_A + cz_A \Rightarrow \\ a(x_0 + at_0) + b(y_0 + bt_0) + c(z_0 + ct_0) &= ax_A + by_A + cz_A \Rightarrow \\ \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)t_0 &= a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0) + c(z_A - z_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow t_0 &= \frac{a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0) + c(z_A - z_0)}{(a^2 + b^2 + c^2)} \end{aligned}$$

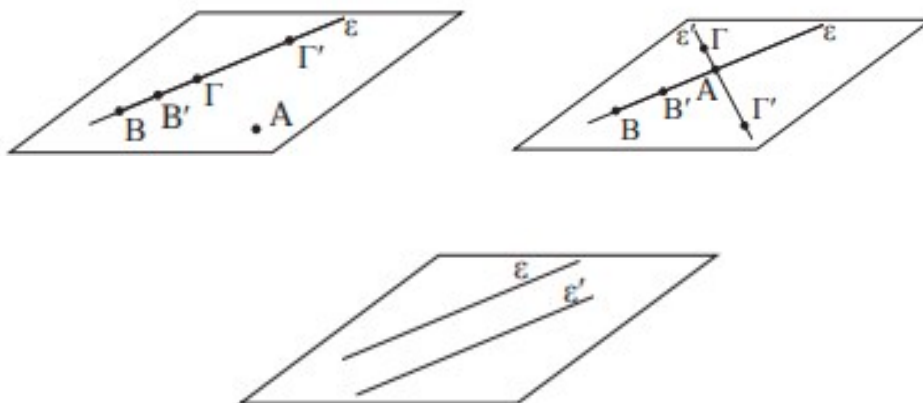
Άρα οι συντεταγμένες του σημείου B – που είναι η ζητούμενη προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία ε – έχει συντεταγμένες

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_0, y_0, z_0) + \frac{a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0) + c(z_A - z_0)}{(a^2 + b^2 + c^2)}(a, b, c)$$

### Επίπεδα στον τρισδιάστατο χώρο

Γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια γεωμετρία ότι ένα επίπεδο μπορεί να οριστεί με τέσσερις τρόπους

- α) από μία ευθεία και ένα σημείο που δεν ανήκει στην ευθεία
- β) από δύο τεμνόμενες ευθείες
- γ) από δύο παράλληλες ευθείες
- δ) από τρία μη συνευθειακά σημεία



Οι τέσσερις τρόποι αυτοί είναι ισοδύναμοι. Έστω O ένα σημείο του τρισδιάστατου χώρου και ένα Καρτεσιανό σύστημα αξόνων x, y και z με κέντρο το σημείο αυτό. Θα βρούμε μια εξίσωση του επιπέδου το οποίο ορίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες. Έστω τρία σημεία του τρισδιάστατου χώρου τα οποία είναι τα

$$A = (x_A, y_A, z_A)$$

$$B = (x_B, y_B, z_B)$$

$$C = (x_C, y_C, z_C)$$

Από αυτά τα τρία σημεία περνά ένα επίπεδο. Ορίζουμε τα παρακάτω διανύσματα

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$$

Ορίζουμε τις παρακάτω ευθείες

$$\bar{r}_1 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3 : u \rightarrow \bar{r}_1(u) = (x_A, y_A, z_A) + u(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$\bar{r}_2 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3 : v \rightarrow \bar{r}_2(v) = (x_A, y_A, z_A) + v(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$$

Έχουμε επίσης και

$$\bar{r}_1 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3 : u \rightarrow \bar{r}_1(u) = (x_A, y_A, z_A) + u\bar{a}$$

$$\bar{r}_2 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3 : v \rightarrow \bar{r}_2(v) = (x_A, y_A, z_A) + v\bar{b}$$

Οι δύο παραπάνω ευθείες τέμνονται στο σημείο A γιατί εάν θέσουμε  $u = v = 0$  τότε

$$\bar{r}_1(0) = (x_A, y_A, z_A)$$

$$\bar{r}_2(0) = (x_A, y_A, z_A)$$

Επομένως οι δύο (τεμνόμενες) παραπάνω ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο. Οι συντεταγμένες  $(x, y, z)$  των σημείων του επιπέδου αυτού βρίσκονται από την πρόσθεση της οικογένειας των διανυσμάτων

$$(x, y, z) = u\bar{a} + v\bar{b} = u(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) + v(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A), \quad u, v \in \mathcal{R}$$

τα οποία έχουν ως αρχή το σημείο A. Επομένως η διανυσματική εξίσωση του ζητούμενου επιπέδου είναι

$$\bar{r} : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^3 : (u, v) \rightarrow \bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) =$$

$$= (x_A, y_A, z_A) + u(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) + v(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$$

ή

$$\bar{r} : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^3 : (u, v) \rightarrow \bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (x_A, y_A, z_A) + u\bar{a} + v\bar{b}$$

Στην ίδια εξίσωση θα καταλήγαμε εάν ξεκινούσαμε από την υπόθεση με δοθείσα ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής. Θέλουμε τώρα να βρούμε την εξίσωση ενός επιπέδου το οποίο περνά από τρία δοθέντα σημεία

$$A = (x_A, y_A, z_A)$$

$$B = (x_B, y_B, z_B)$$

$$C = (x_C, y_C, z_C)$$

Έστω  $(x, y, z)$  ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου που ψάχνουμε. Σχηματίζουμε τις διαφορές

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = \bar{a}$$

$$(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = \bar{b}$$

$$(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = \bar{c}$$

Οι παραπάνω διαφορές μπορούν να θεωρηθούν και ως οι συντεταγμένες τριών διανυσμάτων  $\bar{a}, \bar{b}$  και  $\bar{c}$  τα οποία εφ' όσον ανήκουν στο επίπεδο που ψάχνουμε είναι συνεπίπεδα. Όμως από την θεωρία γνωρίζουμε ότι όταν τρία διανύσματα είναι συνεπίπεδα το μεικτό τους γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν άρα

$$[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + \Delta = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση για το επίπεδο που ψάχνουμε είναι αλγεβρικής μορφής. Η παραπάνω ορίζουσα μπορεί να προκύψει και από την ανάπτυξη της παρακάτω ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Άρα και η παραπάνω ορίζουσα είναι και αυτή εξίσωση του επιπέδου που ψάχναμε.

Τέλος εάν έχουμε δύο παράλληλες ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  τότε σύμφωνα με τα Ευκλείδεια αξιώματα πάνω σε κάθε μια από τις δύο ευθείες υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία. Επιλέγουμε δύο σημεία πάνω στην ευθεία  $\epsilon_1$  και ένα σημείο πάνω στην ευθεία  $\epsilon_2$  οπότε έχουμε τρία μη συνευθειακά σημεία. Η εξίσωση του επιπέδου που θα βρούμε θα είναι της μορφής  $Ax + By + Cz + \Delta = 0$

Μέχρι τώρα είδαμε πως μπορούμε να βρούμε εξίσωση ενός επιπέδου με τα Ευκλείδεια αξιώματα. Στην συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να βρούμε εξίσωση ενός επιπέδου από την δομή του εσωτερικού γινομένου στον τρισδιάστατο χώρο.

Έστω ένα διάνυσμα

$$\bar{n} = (a_1, a_2, a_3)$$

το οποίο έχει ως αρχή ένα σημείο  $A$  με συντεταγμένες  $(x_A, y_A, z_A)$ . Θεωρούμε και όλα τα σημεία του χώρου με συντεταγμένες  $(x, y, z)$  τέτοια ώστε

$$\langle \bar{n}, (x - x_A, y - y_A, z - z_A) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a_1, a_2, a_3), (x - x_A, y - y_A, z - z_A) \rangle = 0$$

Η οικογένεια των διανυσμάτων με συντεταγμένες  $(x - x_A, y - y_A, z - z_A)$  είναι διανύσματα τα οποία είναι κάθετα στο διάνυσμα  $\bar{n}$ . Άρα και οι φορείς των διανυσμάτων αυτών είναι κάθετοι στον φορέα του διανύσματος  $\bar{n}$ . Οι κάθετοι φορείς αυτοί τέμνονται όλοι στο σημείο  $A$  άρα ορίζουν ένα επίπεδο. Επομένως η εξίσωση του επιπέδου που ψάχνουμε είναι η

$$\langle (a_1, a_2, a_3), (x - x_A, y - y_A, z - z_A) \rangle = 0 \Leftrightarrow a_1x + a_2y + a_3z + (-a_1x_A - a_2y_A - a_3z_A) = 0$$



Παρατηρούμε ότι η εξίσωση του επιπέδου που ψάχναμε είναι πάλι της μορφής  $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$

Σχόλιο: Η διανυσματική εξίσωση ενός επιπέδου  $\pi$  η

$$\begin{aligned}\bar{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow \bar{r}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \\ &= (x_A, y_A, z_A) + u(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) + v(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)\end{aligned}$$

γράφεται σε παραμετρική μορφή

$$\begin{aligned}x(u, v) &\equiv x = x_A + u(x_B - x_A) + v(x_C - x_A) \\ y(u, v) &\equiv y = y_A + u(y_B - y_A) + v(y_C - y_A) \\ z(u, v) &\equiv z = z_A + u(z_B - z_A) + v(z_C - z_A)\end{aligned}$$

Έστω ένα επίπεδο με αλγεβρική εξίσωση  $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$  με τον συντελεστή  $\Gamma$  να είναι διάφορος του μηδενός. Τότε μπορούμε να εκφράσουμε την αλγεβρική εξίσωση του επιπέδου ως

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{Ax + By + \Delta}{\Gamma}, \Gamma \neq 0$$

### Χρήσιμο τυπολόγιο

Είδαμε ότι όταν έχουμε ως δεδομένο ένα κάθετο διάνυσμα  $(a_1, a_2, a_3)$  σε ένα επίπεδο τότε η εξίσωση του επιπέδου γράφεται σαν

$$a_1x + a_2y + a_3z + (-a_1x_A - a_2y_A - a_3z_A) = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι εάν η εξίσωση του επιπέδου δίδεται σαν  $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$  τότε ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο έχει συντεταγμένες  $(A, B, \Gamma)$ . Επομένως και κάθε διάνυσμα  $(A_1, B_1, \Gamma_1) = \lambda(A, B, \Gamma)$ , ( $\lambda$  πραγματικός αριθμός) είναι κάθετο στο επίπεδο. Άρα ένα διάνυσμα  $(a, b, c)$  είναι κάθετο στο επίπεδο αν ισχύει ότι

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{\Gamma} = \lambda$$

Εάν το διάνυσμα  $(a, b, c)$  είναι κάθετο σε ένα επίπεδο με εξίσωση  $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$  τότε κάθε διάνυσμα  $(a_1, b_1, c_1)$  που είναι κάθετο στο  $(a, b, c)$  είτε ανήκει στο επίπεδο είτε είναι παράλληλο στο επίπεδο.

Άρα ένα διάνυσμα  $(a_1, b_1, c_1)$  είναι παράλληλο στο δοθέν επίπεδο ή είναι πάνω στο επίπεδο εάν ισχύει ότι

$$\langle (a_1, b_1, c_1), (A, B, \Gamma) \rangle = 0 \Rightarrow a_1A + b_1B + c_1\Gamma = 0$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

Δύο επίπεδα με εξισώσεις

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0$$

είναι παράλληλα εάν ισχύει ότι

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \lambda, \lambda \in \mathfrak{R}$$

ταντίζονται εάν ισχύει ότι

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \lambda, \lambda \in \mathfrak{R}$$

και είναι κάθετα εάν ισχύει ότι

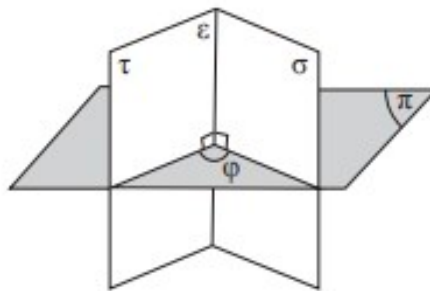
$$A_1A_2 + B_1B_2 + \Gamma_1\Gamma_2 = 0$$

Έστω δύο επίπεδα  $\tau$  και  $\sigma$  με εξισώσεις

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Έστω ότι τα δύο αυτά επίπεδα τέμνονται κατά μήκος μια ευθείας  $\epsilon$ .



Θεωρούμε και ένα επίπεδο  $\pi$  το οποίο τέμνει κάθετα τα δύο επίπεδα. Έχουμε τους παρακάτω ορισμούς

Ονομάζουμε *δίεδρη γωνία* με ακμή  $\epsilon$  και έδρες τα επίπεδα  $\tau$  και  $\sigma$  την γωνία μεταξύ των δύο επιπέδων που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Έστω  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  οι ευθείες οι οποίες είναι οι τομές του επιπέδου  $\pi$  με τα επίπεδα  $\tau$  και  $\sigma$  αντίστοιχα και  $E$  το σημείο τομής τους.

Ονομάζουμε *γωνία μεταξύ των δύο επιπέδων  $\tau$  και  $\sigma$*  την γωνία  $\varphi$  που σχηματίζεται από τις ημιευθείες  $E\epsilon_1$  και  $E\epsilon_2$ .

Η γωνία αυτή ισούται με

$$\phi = \text{τοξσυν} \left( \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right)$$

Γωνία μεταξύ ευθείας και ενός επιπέδου. Έστω μια ευθεία  $\varepsilon$  με διανυσματική εξίσωση

$$\bar{r} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}(t) = (x_A, y_A, z_A) + t(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

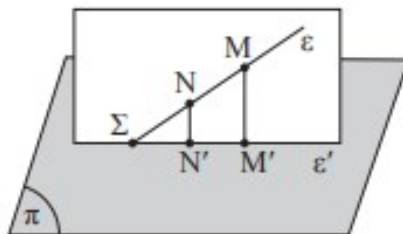
και ένα επίπεδο  $\Pi$  με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ . Είδαμε ότι το διάνυσμα με συντεταγμένες  $(A, B, \Gamma)$  είναι κάθετο στο επίπεδο. Η γωνία μεταξύ της ευθείας  $\varepsilon$  και του διανύσματος  $(A, B, \Gamma)$  ισούται με

$$\omega = \text{τοξσυν} \left( \frac{\langle (A, B, \Gamma), (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \rangle}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2} \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} \right)$$

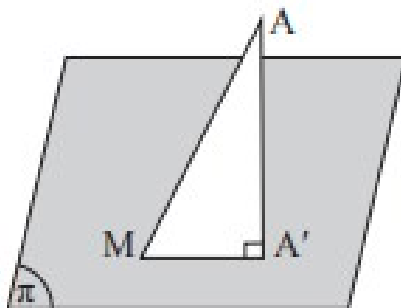
Ορίζουμε ως γωνία  $\theta$  μεταξύ της ευθείας  $\varepsilon$  και του επιπέδου  $\Pi$  το μέγεθος

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \omega$$

Άρα εάν  $\omega = 0$  τότε η ευθεία  $\varepsilon$  είναι κάθετη στο επίπεδο  $\Pi$ .



Ορίζουμε ως κάθετη ή ορθή προβολή ενός σημείου  $A$  της ευθείας  $\varepsilon$  στο επίπεδο  $\Pi$  το σημείο που προκύπτει ως η τομή μεταξύ του επιπέδου  $\Pi$  και της κάθετης ευθείας που περνά από το σημείο  $A$ .



Μια ευθεία  $\epsilon$  ονομάζεται παράλληλη ως προς ένα επίπεδο εάν δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το επίπεδο.

*Απόσταση σημείου από επίπεδο*

Έστω ένα σημείο  $M$  με συντεταγμένες  $(x_M, y_M, z_M)$  και ένα επίπεδο  $\Pi$  με εξίσωση  $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ . Η απόσταση του σημείου  $A$  από το επίπεδο ισούται με

$$d(M, \Pi) = \frac{|Ax_M + By_M + \Gamma z_M + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

Σχόλιο: Οι συντεταγμένες του σημείου  $M'$  που είναι η ορθή προβολή του σημείου  $M$  στο επίπεδο  $\Pi$  δίδονται από την παρακάτω σχέση

$$(x_{M'}, y_{M'}, z_{M'}) = (x_M, y_M, z_M) + t_0 \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}} (A, B, \Gamma), t_0 = -\frac{Ax_M + By_M + \Gamma z_M + \Delta}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

Σχόλιο: Εάν θέλουμε την προβολή μιας ευθείας  $\epsilon$  πάνω στο επίπεδο τότε επιλέγουμε δύο αυθαίρετα σημεία  $M$  και  $N$  πάνω στην ευθεία  $\epsilon$  και βρίσκουμε τις προβολές τους  $M'$  και  $N'$  πάνω στο επίπεδο σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο. Έτσι η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι

$$\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \bar{r}(t) = (x_{M'}, y_{M'}, z_{M'}) + t(x_{M'} - x_{N'}, y_{M'} - y_{N'}, z_{M'} - z_{N'})$$

*Απόσταση μεταξύ δύο παραλλήλων επιπέδων*

Έστω δύο παράλληλα επίπεδα με εξισώσεις  $A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$  και  $A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$ . Για να βρούμε την απόσταση μεταξύ τους επιλέγουμε ένα σημείο  $E$  πάνω στο πρώτο επίπεδο με συντεταγμένες  $(0,1,-(\Delta_1 + B_1)/\Gamma_1)$ . Η απόσταση μεταξύ των δύο επιπέδων βρίσκεται εφαρμόζοντας την σχέση απόστασης σημείου από επίπεδο.

.....