<u>Μάθημα 2ο</u>

1 Γεωμετρικά μεγέθη δομές και γινόμενα

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία είτε με τον κανόνα και τον διαβήτη είτε μέσω αλγεβρικών σχέσεων μπορούμε να υπολογίζουμε μήκη ευθυγράμμων τμημάτων και γωνίες. Επί πλέον μπορούμε να μετράμε και άλλα μεγέθη όπως περίμετρο, εμβαδό επίπεδων σχημάτων ή όγκους στερεών (κύβοι, παραλληλεπίπεδα κλπ).

Ο υπολογισμός της περιμέτρου, εμβαδού και όγκου γινόταν μεν με αλγεβρικές σχέσεις αλλά όπως είπαμε δεν γινόταν χρήση της έννοιας των συντεταγμένων.

Θέλοντας να συνεχίσουμε να κάνουμε υπολογισμούς στον τρισδιάστατο χώρο (και στο επίπεδο) είναι ανάγκη να ορίσουμε κάποιες αλγεβρικές σχέσεις με τις οποίες θα μπορούμε να υπολογίζουμε γωνίες και μήκη, εμβαδά κλπ με μια διαφορά. Οι σχέσεις που θα ορίσουμε για τον υπολογισμό των παραπάνω μεγεθών θα περιέχουν τις συντεταγμένες των σημείων ή των διανυσμάτων που έχουν σχέση με το γεωμετρικό αντικείμενο που μελετάμε.

Με τον τρόπο αυτό ο τρισδιάστατος χώρος εμπλουτίζεται με επί πλέον δομές οι οποίες μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε παραπάνω πράγματα από αυτά που μπορούμε μόνο από την δομή του διανυσματικού χώρου.

α) Απόσταση

Αν $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ δύο σημεία του τρισδιάστατου χώρου τότε η απόσταση μεταξύ τους ορίζεται ως

$$d : \Re^3 \times \Re^3 \to \Re_+ : (A,B) \to d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \qquad (2.1)$$

β) Νόρμα

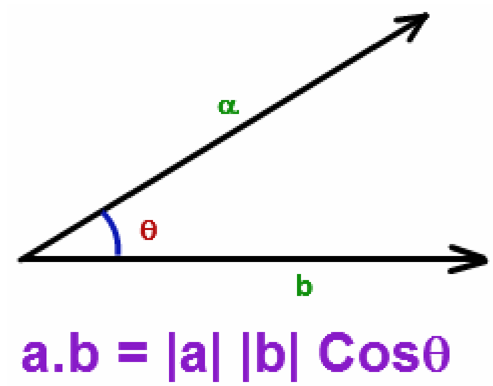
$$\| \ \| : \Re^3 \to \Re_+ : \overline{OA} = (x_1, y_1, z_1) \to \left\| \overline{OA} \right\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \qquad (2.2)$$

γ) Εσωτερικό Γινόμενο

$$\begin{aligned} &\langle \ , \ \rangle : \Re^3 \times \Re^3 \to \Re : (\bar{a}, \bar{b}) \to \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \sigma\upsilon\nu\theta \\ &\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ &\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Μέσω του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να μετράμε γωνία μεταξύ διανυσμάτων - άρα και μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων - δηλαδή

$$\theta = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|}\right) \tag{2.4}$$

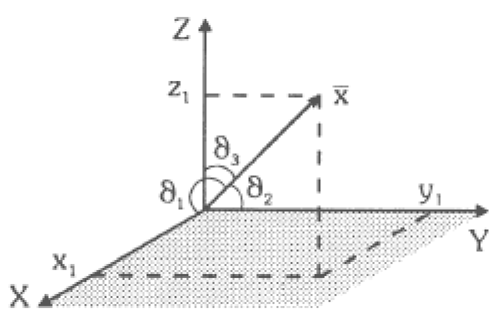


Έστω ένα διάνυσμα με Καρτεσιανές συντεταγμένες

$\bar{x} = (x_1, y_1, z_1)$

Ορίζουμε ως *συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος* $\bar{x}$ *τα μεγέθη*

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \frac{\langle \bar{x}, \bar{e}_1 \rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{e}_1\|} = \frac{\langle (x_1, y_1, z_1), (1,0,0) \rangle}{\|\bar{x}\|\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{x_1}{\|\bar{x}\|} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu\theta_2 = \frac{\langle \bar{x}, \bar{e}_2 \rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{e}_2\|} = \frac{y_1}{\|\bar{x}\|} \ , \ \sigma\upsilon\nu\theta_3 = \frac{\langle \bar{x}, \bar{e}_3 \rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{e}_3\|} = \frac{z_1}{\|\bar{x}\|}$$



Ισχύει η παρακάτω ταυτότητα

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta_1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta_2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta_3 = \frac{x_1^{\ 2}}{\|\bar{x}\|^2} + \frac{y_1^{\ 2}}{\|\bar{x}\|^2} + \frac{z_1^{\ 2}}{\|\bar{x}\|^2} = 1$$

Έστω τώρα τα διανύσματα

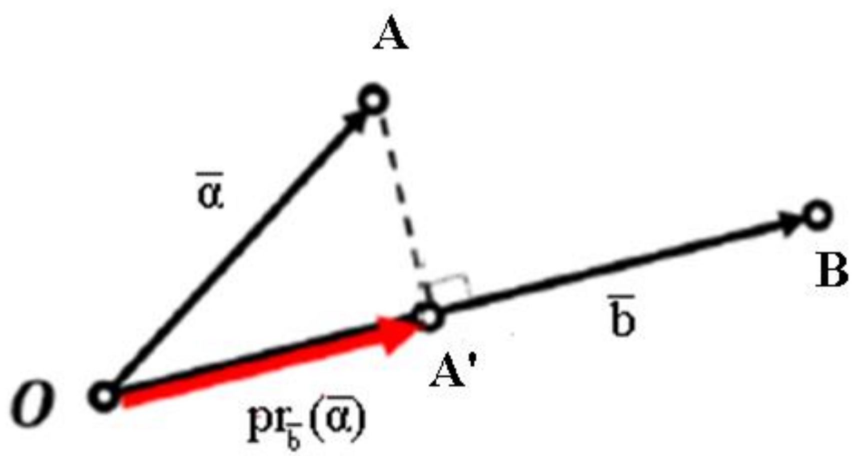
$$\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)\ \ ,\ \ \bar{b}=(b_1,b_2,b_3)\ \ ,\ \ \bar{b}_u=\frac{1}{\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}}(b_1,b_2,b_3)$$

Όταν γράφουμε $\langle \bar{a},\bar{b}_u\rangle$ με $\bar{b}_u$ μοναδιαίο διάνυσμα τότε το αποτέλεσμα του εσωτερικού γινομένου το λέμε ως *η ορθογώνια προβολή του διανύσματος* $\bar{a}$ *πάνω στο μοναδιαίο διάνυσμα* $\bar{b}_u$

$$pr_{\bar{b}_u}(\bar{a})=\langle \bar{a},\bar{b}_u\rangle=\|\bar{a}\|\|\bar{b}_u\|\sigma\upsilon\nu\theta=\|\bar{a}\|\sigma\upsilon\nu\theta$$

Εάν θέλουμε να ορίσουμε την ορθογώνια προβολή διανύσματος σε ένα διάνυσμα $\bar{b}$ το οποίο δεν είναι μοναδιαίο τότε

$$pr_{\bar{b}}(\bar{a})=\langle \bar{a},\bar{b}\rangle\frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|^2}$$



Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

α) Διπροσθετικό

$$\begin{aligned}\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\Re^3\ \langle \bar{a}+\bar{b},\bar{c}\rangle&=\langle \bar{a},\bar{c}\rangle+\langle \bar{b},\bar{c}\rangle\\ \langle \bar{a},\bar{b}+\bar{c}\rangle&=\langle \bar{a},\bar{b}\rangle+\langle \bar{a},\bar{c}\rangle\end{aligned}\qquad(2.5)$$

β) $\forall\lambda\in\Re,\forall\bar{a},\bar{b}\in\Re^3\ \langle\lambda\bar{a},\bar{b}\rangle=\langle\bar{a},\lambda\bar{b}\rangle=\lambda\langle\bar{a},\bar{b}\rangle$ (2.6)

Οι δύο παραπάνω ιδιότητες δηλώνουν ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμική απεικόνιση.

γ) Αντιμεταθετικό

$$\forall \bar{a},\bar{b} \in \Re^3 \ \langle \bar{a},\bar{b} \rangle = \langle \bar{b},\bar{a} \rangle \tag{2.7}$$

δ) Θετικώς ορισμένο

$$\forall \bar{a} \in \Re^3 \ \langle \bar{a},\bar{a} \rangle > 0 \ \ \langle \bar{a},\bar{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = (0,0,0) \tag{2.8}$$

Παρατήρηση: Στο εσωτερικό γινόμενο δεν ισχύει ο κανόνας της διαγραφής όπως στον βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

$\langle \bar{a},\bar{b} \rangle = \langle \bar{a},\bar{c} \rangle \Rightarrow \bar{b} = \bar{c}$ ΟΧΙ!

Σχόλιο: Εάν το διάνυσμα $\bar{b}$ θεωρηθεί ως η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα μάζας m και $\bar{a}$ η διεύθυνση της ευθείας διαδρομής του σώματος m στην οποία κινείται για κάποιο χρόνο t τότε το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων είναι το έργο της δύναμης $\bar{b}$ κατά την ευθεία διαδρομή του σώματος μήκους όσο το μέτρο του διανύσματος $\bar{a}$.

Β) Εξωτερικό Γινόμενο

Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζεται σαν

$$\times : \Re^3 \times \Re^3 \to \Re^3 : (\bar{a},\bar{b}) \to (\bar{a} \times \bar{b}) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

Το διάνυσμα $\bar{a} \times \bar{b}$ είναι τέτοιο ώστε να είναι κάθετο στα διανύσματα $\bar{a}$ και $\bar{b}$ και οι (προσανατολισμένοι) φορείς τους να αποτελούν ένα δεξιόστροφο σύστημα αξόνων. Το δε μέτρο του ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές a και b δηλαδή έχουμε και την σχέση

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \|\bar{a}\|\|\bar{b}\|\eta\mu\phi \tag{2.10}$$

όπου φ η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων a και b.
Επίσης το εμβαδόν του τριγώνου με πλευρές a, b και γωνία μεταξύ τους φ ισούται με

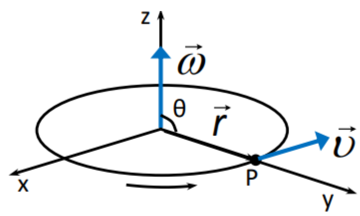
$$E_{tr} = \frac{1}{2}\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \frac{1}{2}\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|\eta\mu\phi \tag{2.11}$$

Σχόλιο: Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων a και b μπορεί να γραφτεί και σαν

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

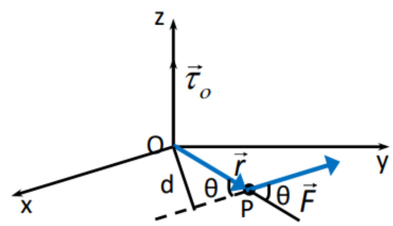
Φυσική ερμηνεία

ι) Εάν ένα σώμα μάζας m εκτελεί κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας r. Έστω $\bar{\varpi}$ το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας. Τότε το διάνυσμα της ταχύτητας του σώματος $\bar{v}$ είναι ένα διάνυσμα που υπολογίζεται από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\bar{\varpi}$ και $\bar{r}$

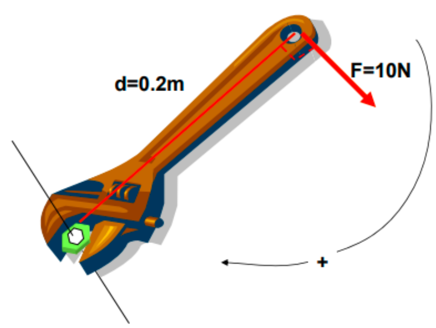


$$\bar{v} = \bar{\varpi} \times \bar{r}$$

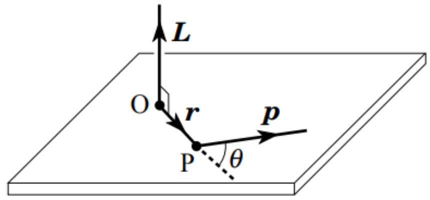
ιι) Η ροπή $\bar{\tau}_0$ μιας δύναμης $\bar{F}$ ενός σώματος μάζας m που περιστρέφεται



$$\bar{\tau}_0 = \bar{r} \times \bar{F} = |\bar{r}||\bar{F}|\eta\mu\theta$$



ιιι) Στροφορμή (Angular momentum) σωμάτιου μάζας m

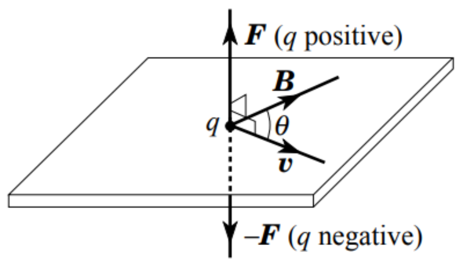


$$\overline{L} = \overline{r} \times \overline{p} = \overline{r} \times (m\overline{v})$$

ιν) Δύναμη Lorentz

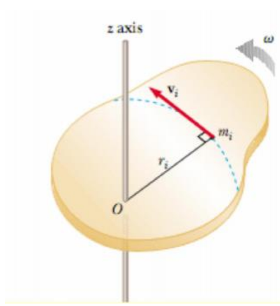
Ένα σωματίδιο με ηλεκτρικό φορτίο q κινείται με ταχύτητα $\overline{v}$ μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο μαγνητικής έντασης $\overline{B}$ τότε η μαγνητική δύναμη που ασκείται στο φορτίο q ισούται με

$\overline{F} = q(\overline{v} \times \overline{B})$ όπου το διάνυσμα $\overline{B}$ είναι το διάνυσμα της μαγνητικής έντασης



ν) Κατανομή ταχυτήτων σε περιστρεφόμενο στερεό

Έστω ένα στερεό σώμα μάζας M το οποίο εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από ένα σταθερό άξονα.



Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας κάθε σημείου του στερεού σώματος M είναι συνάρτηση των Καρτεσιανών συντεταγμένων των σημείων του στερεού. Το ίδιο ισχύει και για το διάνυσμα θέσης r του κάθε σημείου από την αρχή του συστήματος O δηλαδή

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}(x, y, z) = (\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z), \omega_3(x, y, z))$$
$$\overline{r} = \overline{r}(x, y, z) = (r_1(x, y, z), r_2(x, y, z), r_3(x, y, z))$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας v κάθε σημείου του στερεού είναι και αυτό συνάρτηση των Καρτεσιανών συντεταγμένων των σημείων του στερεού και ισχύει ότι

$$\bar{v}(x,y,z)=(\bar{\varpi}\times\bar{r})(x,y,z)=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ r_3\end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός ονομάζεται και *τελεστής γωνιακής ταχύτητας*.

Ιδιότητες

α) $\forall \bar{a},\bar{b}\in\Re^3\,(\bar{a}\times\bar{b})=-(\bar{b}\times\bar{a})$ (2.13)

β) $\bar{a}\times\bar{b}=(0,0,0)\Leftrightarrow\bar{a}\,//\,\bar{b}$ (2.14)

γ) $\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\Re^3\,(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{c})+(\bar{b}\times\bar{c})$ (2.15)

δ) $\forall \bar{a},\bar{b}\in\Re^3,\lambda\in\Re\,\lambda(\bar{a}\times\bar{b})=((\lambda\bar{a})\times\bar{b})=(\bar{a}\times(\lambda\bar{b}))$ (2.16)

ε) $$\begin{aligned}&\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\Re^3\,(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=\langle\bar{a},\bar{c}\rangle\bar{b}-\langle\bar{c},\bar{b}\rangle\bar{a}\\ &\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\Re^3\,\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\langle\bar{a},\bar{c}\rangle\bar{b}-\langle\bar{a},\bar{b}\rangle\bar{c}\end{aligned}$$ (2.17)

στ) $\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}\in\Re^3\,\langle(\bar{a}\times\bar{b}),(\bar{c}\times\bar{d})\rangle=\langle\bar{a},\bar{c}\rangle\langle\bar{b},\bar{d}\rangle-\langle\bar{b},\bar{c}\rangle\langle\bar{a},\bar{d}\rangle$ (2.18)

Γ) Μεικτό γινόμενο

Ορίζεται σαν

$$[\ ,\ ,\ ]:\Re^3\times\Re^3\times\Re^3\to\Re:(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\to[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

Το μεικτό γινόμενο είναι θετικό όταν τα διανύσματα αποτελούν μια δεξιόστροφη τριάδα, αρνητικό όταν αποτελούν μια αριστερόστροφη τριάδα, και ίσο με το μηδέν όταν είναι συνεπίπεδα.

Σχόλιο: Παρόμοια συνθήκη εύρεσης προσανατολισμού δύο διανυσμάτων a και b στο επίπεδο είναι και η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0 \ \delta\varepsilon\xi\iota\acute{o}\sigma\tau\rho o\varphi o \ \zeta\varepsilon\acute{\upsilon}\gamma o\varsigma$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} < 0 \ \alpha\rho\iota\sigma\tau\varepsilon\rho\acute{o}\sigma\tau\rho o\varphi o \ \zeta\varepsilon\acute{\upsilon}\gamma o\varsigma$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \ \gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{\omega}\varsigma \ \varepsilon\xi\alpha\rho\tau\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu\alpha$$

Ιδιότητες

α) Τριπροσθετικό

$$\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d} \in \Re^3 \Rightarrow [\bar{a}+\bar{d},\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\bar{b},\bar{c}] + [\bar{d},\bar{b},\bar{c}]$$

β) Αντισυμμετρικό

$$\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c}, \in \Re^3 \Rightarrow [\bar{a},\bar{b},\bar{c}] = -[\bar{b},\bar{a},\bar{c}] = [\bar{b},\bar{c},\bar{a}]$$

γ) $\forall \lambda \in \Re, \forall \bar{a},\bar{b},\bar{c} \in \Re^3 \Rightarrow [\lambda\bar{a},\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\lambda\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\bar{b},\lambda\bar{c}] = \lambda[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]$

Οι ιδιότητες α) και γ) μας δηλώνουν ότι το μεικτό γινόμενο είναι γραμμική απεικόνιση.

δ) Ταυτότητα

$$[\bar{a},\bar{b},\bar{d}]\bar{c} - [\bar{a},\bar{b},\bar{c}]\bar{d} = (\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})$$

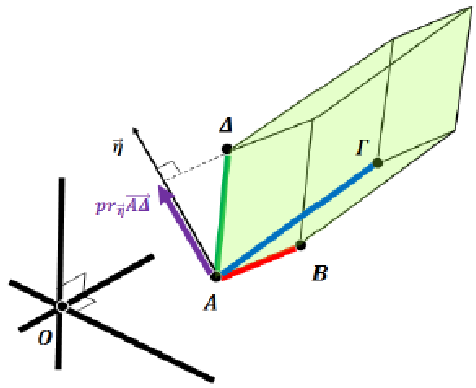
ε)

$$\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{e},\bar{f} \in \Re^3 \Rightarrow [\bar{a},\bar{b},\bar{c}][\bar{d},\bar{e},\bar{f}] = \det\left[\begin{bmatrix}\bar{a}\\ \bar{b}\\ \bar{c}\end{bmatrix}[\bar{d},\bar{e},\bar{f}]\right] =$$

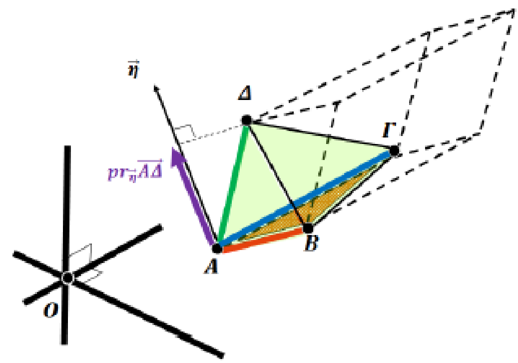
$$= \det\begin{bmatrix} \langle\bar{a},\bar{d}\rangle & \langle\bar{a},\bar{e}\rangle & \langle\bar{a},\bar{f}\rangle \\ \langle\bar{b},\bar{d}\rangle & \langle\bar{b},\bar{e}\rangle & \langle\bar{b},\bar{f}\rangle \\ \langle\bar{c},\bar{d}\rangle & \langle\bar{c},\bar{e}\rangle & \langle\bar{c},\bar{f}\rangle \end{bmatrix}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Η απόλυτη τιμή του μεικτού γινομένου τριών διανυσμάτων a, b, και c είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές όσο το μέτρο των διανυσμάτων a, b, και c.
Επίσης ο όγκος του τετράεδρου με τις ίδιες ακμές ισούται με το 1 / 6 της απόλυτης τιμής του μεικτού γινομένου των τριών αυτών διανυσμάτων



$\vec{\eta}$
$pr_{\vec{\eta}}\overrightarrow{A\Delta}$
Δ
Γ
B
A
O



$\vec{\eta}$
$pr_{\vec{\eta}}\overrightarrow{A\Delta}$
Δ
Γ
B
A
O

....