Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

7ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Σημειώσεις: 1) Με την ορολογία "*εξετάστε μια σειρά ως προς τη σύγκλιση*" εννοούμε να εξεταστεί αν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει, χωρίς να ασχοληθούμε με την απόλυτη σύγκλιση. Όταν λέμε "*εξετάστε μια σειρά ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση*" εννοούμε να εξεταστεί αν η σειρά συγκλίνει απολύτως ή συγκλίνει απλά χωρίς να συγκλίνει απολύτως ή αποκλίνει.

2) Είναι συχνό το φαινόμενο να εφαρμόζονται *πάνω από ένα κριτήρια σύγκλισης* σε μια σειρά. Επομένως ακόμα και αν μια άσκηση υποδεικνύει τη χρήση π.χ. του Κριτηρίου της Ρίζας, εσείς ενδεχομένως να μπορείτε να τη λύσετε με τη χρήση π.χ. του Κριτηρίου του Λόγου.

Άσκηση 1 (Κριτήριο Σύγκρισης)**.** Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}.$$

Υπόδειξη: Υπενθυμίζουμε την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

Άσκηση 2 (Κριτήριο Λόγου d' Alembert)**.** Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}.$$

Άσκηση 3 (Κριτήριο Ρίζας)**.** Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}.$$

Άσκηση 4 (Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης)**.** Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-5}{2^n}.$$

Υπόδειξη: Στην πρώτη σειρά θεωρήστε την ακολουθία $b_n = \dfrac{n^3}{n^5} = \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 1$. Ακολουθήστε παρόμοιο συλλογισμό στις άλλες δύο σειρές.

Άσκηση 5. Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές όπως ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+1/n)^n}{(2^n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2},$$

ως προς τη σύγκλιση. Με "cos" εννούμε τη συνάρτηση συνημίτονο.

Άσκηση 6. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.

Άσκηση 7.

(i) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n \cdot \pi + \frac{1}{n}\right)$$

δεν συγκλίνει απολύτως. (Στο μάθημα δείξαμε ότι αυτή η σειρά συγκλίνει.)

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\frac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin x$ για κάθε $x \in [0, \pi/2]$.

(ii) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$$

συγκλίνει.

(iii) Εξετάστε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} - 1} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + 1}\right)$$

ως προς τη σύγκλιση.