Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

3ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Υπενθύμιση ορολογίας:

- Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ *περιέχει σχεδόν όλα τα* $n \in \mathbb{N}$ ακριβώς όταν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n \in A$.
- Συχνά χρησιμοποιείται η ορολογία "*τελικά για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$" αντί της "σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$" - και οι δύο ορολογίες σημαίνουν το ίδιο πράγμα.
- Ένα σύνολο που περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ (ή αλλιώς τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$) λέγεται και *συμπεπερασμένο*. Δείτε το σχόλιο στην Άσκηση 7.

Άσκηση 1. Επιλέξτε Σωστό-Λάθος (χωρίς απόδειξη).

	Σωστό	**Λάθος**
1. Η ακολουθία $a_n = n^3$, $n \geq 1$ είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη.	Σ	Λ
2. Κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία είναι και αύξουσα.	Σ	Λ
3. Μια αύξουσα ακολουθία που δεν είναι σταθερή είναι γνησίως αύξουσα.	Σ	Λ
4. Μια ακολουθία είναι φραγμένη ακριβώς όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη.	Σ	Λ
5. Κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη.	Σ	Λ

Άσκηση 2.

(i) Δώστε το παράδειγμα μιας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ που είναι άνω φραγμένη και όχι κάτω φραγμένη (με απόδειξη).

(ii) Δώστε το παράδειγμα μιας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ που δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη (με απόδειξη).

(iii) Δώστε το παράδειγμα μιας γνησίως φθίνουσας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ που είναι φραγμένη (με απόδειξη).

Άσκηση 3 (Ισοδυναμίες φραγμένης)**.** Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) υπάρχει $M_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_0$,

(ii) υπάρχει $M_1 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_1$,

(iii) υπάρχει $M_2 > 75847912$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M_2$.

Υπόδειξη. Δείξτε τις συνεπαγωγές (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i).

Άσκηση 4 (Ισοδυναμίες φραγμένης)**.** Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|a_n| \leq M$,

(ii) υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $-M_1 \leq a_n \leq M_2$.

Άσκηση 5. Δίνεται ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$. Διατυπώστε *χωρίς απόδειξη* την άρνηση της ακόλουθης μαθηματικής πρότασης (δεν χρειάζεται να εξετάσετε αν ισχύει):¨

υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $b \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in A$ με: $x > b$ ή $b \leq a$.

Άσκηση 6. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν *σχεδόν όλα* τα $n \in \mathbb{N}$; (Χωρίς απόδειξη)

$$A = \{5, 6, 7, \ldots, 99, 100\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \geq 400\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-3) \cdot (n-8) > 0\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-3) \cdot (n-8) = 0\}$$
$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ο } n \text{ είναι άρτιος}\}$$

Άσκηση 7 (Απαιτητική)**.**

(i) Δείξτε ότι ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν το σύνολο $\mathbb{N} \setminus A$ είναι πεπερασμένο.

Υπόδειξη: Ένα σύνολο $B \subseteq \mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο ακριβώς όταν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα $B \subseteq \{k \in \mathbb{N} \mid k < n_0\}$.

(ii) Συμπεράνετε ότι ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ **δεν** περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ακριβώς όταν έχουμε $n \notin A$ για άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}$.

Σχόλιο: Το (i) της άσκησης αιτιολογεί γιατί ένα σύνολο A που περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται και *συμπεπερασμένο*. Ο όρος προκύπτει από το συνθετικό *συν* (που στα μαθηματικά χρησιμοποιείται κυρίως για να αναφερθεί στο συμπλήρωμα ενός συνόλου) και το επίθετο *πεπερασμένο*.

Επομένως το συν-πεπερασμένο (δηλαδή συμπεπερασμένο σύμφωνα με τους κανόνες της ελληνικής γραμματικής) σύνολο είναι ακριβώς το σύνολο με πεπερασμένο συμπλήρωμα. Από το (i) αυτό είναι το ίδιο με το σύνολο που περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 8. Αποδείξτε ότι το σύνολο A όλων των άρτιων αριθμών δεν περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: Ένας τρόπος να το αποδείξετε είναι με τη βοήθεια της προηγούμενη άσκησης.