Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

2ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου

Άσκηση 1 (Διωνυμικό Ανάπτυγμα).

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n$$

(ii) Υπολογίστε τον αριθμό

$$a = 1 + \binom{5}{1} \cdot (-2) + \binom{5}{2} \cdot (-2)^2 + \cdots + \binom{5}{4} \cdot (-2)^4 + (-2)^5.$$

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει

$$1 + \binom{7}{1} \cdot x + \binom{7}{2} \cdot x^2 + \cdots + \binom{7}{6} \cdot x^6 + x^7 \geq 7x + 1.$$

Υπόδειξη για το (iii). Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli.

Λύση.

(i) Εφαρμόζουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

για $a = 1$ και $b = x$. Παρατηρούμε ότι $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

(ii) Εφαρμόζουμε το (i) για $x = -2$, $n = 5$ και έχουμε ότι

$$a = (1 + (-2))^5 = (-1)^5 = -1.$$

(iii) Εφαρμόζουμε το (i) για $n = 7$ και έχουμε ότι το αριστερό μέρος της ανισότητας είναι ίσο με $(1+x)^7$ το οποίο από την ανισότητα Bernoulli είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $1 + 7x$, αφού $x > -1$.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-3) \cdot (n+2) \cdot (n+4) > 0\}$ είναι μη κενό και βρείτε το ελάχιστο στοιχείο του.

Λύση.

Παρατηρούμε ότι $4 \in A$ επομένως το $\min A$ θα είναι κάποιος από τους αριθμούς $0, 1, 2, 3, 4$.

Ένας τρόπος για να βρούμε το $\min A$ είναι να πάρουμε τα $0, 1, 2, 3$ και να εξετάσουμε ένα-ένα αν ανήκουν στο A. Πιο σύντομα παρατηρούμε ότι

$$(k-3) \cdot (k+2) \cdot (k+4) \leq 0$$

για κάθε $k = 0, 1, 2, 3$ γιατί για αυτά τα k θα έχουμε $k - 3 \leq 0$ και $k + 2, k + 3 \geq 0$. Επομένως $k \notin A$ για κάθε $k = 0, 1, 2, 3$ και αφού $4 \in A$ θα έχουμε $\min A = 4$

Ένας ελαφρά διαφορετικός τρόπος είναι να θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$p(x) = (x-3) \cdot (x+2) \cdot (x+4), \ x \in \mathbb{R}.$$

Με τη βοήθεια του πίνακα προσήμων βρίσκουμε ότι $p(x) > 0$ ακριβώς όταν $-4 < x < -2$ ή $x > 3$. Εμείς θέλουμε τον ελάχιστο φυσικό για τον οποίο $p(x) > 0$ που είναι το $x = 4$. Άρα $\min A = 4$.

Άσκηση 3 (Αρχιμήδεια Ιδιότητα και Αρχή του Ελαχίστου)**.** Δείξτε τα εξής:

(i) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του x.

(ii) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n με $n \leq x < n + 1$.

(iii) Για κάθε $y < 0$ υπάρχει ένα $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq y < m + 1$.

(iv) Συμπεράνετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}$ υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq z < m + 1$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε το σύνολο $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k > x\}$.

Λύση.

Για το (i) θεωρούμε το σύνολο $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k > x\}$. Το σύνολο A είναι μη κενό από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα. Επιπλέον το A είναι υποσύνολο των φυσικών αριθμών. Επομένως από την Αρχή του Ελαχίστου το A έχει ελάχιστο στοιχείο. Με άλλα λόγια υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του x.

Για το (ii) θεωρούμε k να είναι ο ελάχιστος φυσικός μεγαλύτερος του x. Επειδή $x \geq 0$ δεν γίνεται $k = 0$ επομένως $k \geq 1$. Παίρνουμε $n = k - 1 \in \mathbb{N}$. Τότε $n \geq 0$ και άρα $n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον $n + 1 = k > x$.

Τέλος επειδή ο k είναι ο ελάχιστος φυσικός μεγαλύτερος του x, αναγκαστικά ο φυσικός αριθμός $k - 1$ δεν θα είναι μεγαλύτερος του x. Θα έχουμε δηλαδή $k - 1 \leq x$, ισοδύναμα $n \leq x$.

Για το (iii) εφαρμόζουμε το (ii) για $x = -y > 0$ και έχουμε ένα $n \in \mathbb{N}$ με $n \leq -y < n + 1$. Τότε ισχύει

$$-n - 1 < y \leq -n.$$

Αν $y < -n$ παίρνουμε $m = -n - 1 \in \mathbb{Z}$ και έχουμε $m < y < m + 1$. Αν $y = -n$ παίρνουμε $m = -n \in \mathbb{Z}$ και έχουμε $m = y < m + 1$.

Το (iv) είναι άμεσο από τα προηγούμενα: αν $z \geq 0$ εφαρμόζουμε το (ii) για $z = x \geq 0$ και παίρνουμε $m = n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ και αν $z < 0$ εφαρμόζουμε το (iii) για $z = y < 0$.

Άσκηση 4 (Πυκνότητα ρητών στους πραγματικούς)**.** Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε το εξής αποτέλεσμα που είναι γνωστό ως **πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς**:

Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < b$.

Δείχνουμε το παραπάνω με τα εξής βήματα. Δίνονται αρχικά $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

(i) Εξηγήστε γιατί υπάρχουν $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ και $m \in \mathbb{Z}$ με

$$n > \frac{1}{b-a} \quad \text{και} \quad m \leq n \cdot a + 1 < m + 1.$$

(ii) Αν τα m, n είναι όπως στο (i) δείξτε ότι

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

Σχόλιο: Είναι σαφές ότι το $q = \dfrac{m}{n}$ είναι ένας ρητός αριθμός που ικανοποιεί το ζητούμενο.

Λύση.

(i) Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα του υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ που είναι μεγαλύτερο του πραγματικού αριθμού $\dfrac{1}{b-a}$. Εφόσον $b > a$ θα έχουμε $n > \dfrac{1}{b-a} > 0$ και άρα $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Για να βρούμε το m εφαρμόζουμε το (iv) της Άσκησης 3 στον πραγματικό αριθμό $z = n \cdot a + 1$. Υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq n \cdot a + 1 < m + 1$.

(ii) Έχουμε

$$m \leq n \cdot a + 1 < m + 1.$$

Παίρνουμε τη δεύτερη ανίσωση, αφαιρούμε 1 και διαιρούμε με το $n > 0$. Προκύπτει

$$a < \frac{m}{n}\,.$$

Για να δείξουμε ότι $\frac{m}{n} < b$ παρατηρούμε πρώτα το εξής:

$$\begin{aligned} & n > \frac{1}{b-a} \\ \iff & n(b-a) > 1 \quad (\text{γιατί } b-a>0) \\ \iff & n\cdot b - n\cdot a > 1 \\ \iff & n\cdot b > 1 + n\cdot a. \end{aligned}$$

Επειδή $n\cdot a + 1 \geq m$ προκύπτει από τα πιο πάνω ότι $n\cdot b > 1 + n\cdot a \geq m$, δηλαδή $n\cdot b > m$. Διαιρούμε με το $n > 0$ και έχουμε $b > \frac{m}{n}$ που είναι το ζητούμενο.

2ος τρόπος για το $m/n < b$: Από την ανίσωση $m \leq n\cdot a + 1$ προκύπτει $\frac{m-1}{n} \leq a$. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \\ &\leq a + \frac{1}{n} \\ &< a + b - a = b. \end{aligned}$$

Άσκηση 5 (Πυκνότητα αρρήτων στους πραγματικούς)**.** Δείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ με $a < r < b$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τους αριθμούς $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}$ και εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση. Μπορείτε να πάρετε ως δεδομένο ότι το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Λύση.

Αφού $a < b$ και $\sqrt{2} > 0$ θα έχουμε επίσης $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Από την πυκνότητα των ρητών υπάρχει ένα $q \in \mathbb{Q}$ με

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < q < \frac{b}{\sqrt{2}}\ ,$$

ισοδύναμα $a < q\cdot\sqrt{2} < b$. Ο αριθμός $r = q\cdot\sqrt{2}$ δεν μπορεί να είναι ρητός, γιατί αλλιώς και ο αριθμός $q^{-1}\cdot r$ θα ήταν ρητός, (εδώ χρησιμοποιούμε ότι $q^{-1} \in \mathbb{Q}$). Όμως $q^{-1}\cdot r = \sqrt{2}$ που είναι άρρητος. Άρα ο αριθμός r είναι άρρητος.

Άσκηση 6 (Απαιτητική)**.** Δείξτε την Αρχή του Ελαχίστου με τη βοήθεια της Αρχής της Επαγωγής.

Υπόδειξη. Θεωρήστε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum και εφαρμόστε την Αρχή της Επαγωγής παίρνοντας για ιδιότητα P το εξής:

το $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα P αν για κάθε φυσικό $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$.

Συμπεράνετε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum πρέπει να είναι το κενό σύνολο.

Λύση.

Θεωρούμε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum και δείχνουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει το εξής: για κάθε φυσικό $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$.

Για $n = 0$: θεωρούμε έναν φυσικό $k \leq 0$, τότε $k = 0$. Αν είχαμε $k \in A$, δηλαδή $0 \in A$, τότε 0 θα ήταν το minimum του $A \subseteq \mathbb{N}$, ενάντια στην υπόθεσή μας. Άρα $k \notin A$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο n ισχύει το εξής: για κάθε φυσικό $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$. (Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι ισχύει η ίδια ιδιότητα για το $n+1$, δηλαδή ότι για κάθε $k \leq n+1$ ισχύει $k \notin A$.

Αν $k \leq n$ τότε $k \notin A$ από την Επαγωγική Υπόθεση. Επομένως θεωρούμε $k = n+1$. Αν είχαμε $k \in A$ δηλαδή $n+1 \in A$, αφού $k' \notin A$ για κάθε $k' \leq n$ τότε το $n+1$ θα ήταν το minimum του A, άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι το A δεν έχει minimum. Άρα $k \notin A$.

Από την Αρχή της Επαγωγής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει: για κάθε $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$. Ειδικότερα για $k = n$ έχουμε $n \notin A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $A = \emptyset$.

Με άλλα λόγια αν το $A \subseteq \mathbb{N}$ δεν έχει minimum τότε θα είναι το κενό σύνολο, ισοδύναμα αν το $A \subseteq \mathbb{N}$ δεν είναι κενό τότε αναγκαστικά θα έχει minimum.