Ολοκληρώματα

(Περιλαμβάνει αναπλήρωση σχολικής ύλης λόγω πανδημίας)

Βασίλειος Γρηγοριάδης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης

Διευκρίνιση Για όσες/όσους έχουν ήδη μελετήσει ολοκληρώματα: με τον όρο "ολοκλήρωμα" εννοούμε "ορισμένο ολοκλήρωμα".

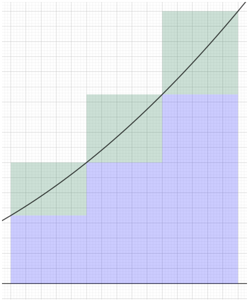
Κίνητρο. Εύρεση εμβαδών και όγκων (Εύδοξος - Αρχιμήδης).

Μοντέρνα διατύπωση. Εύρεση εμβαδού ανάμεσα στη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και του άξονα $x'x$. Αυτό γίνεται μέσα από προσεγγίσεις από εμβαδά ορθογωνίων.

Δεδομένο. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

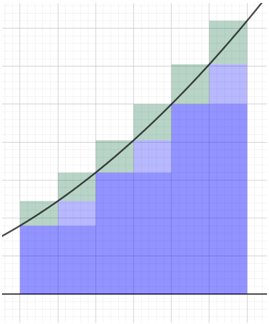
Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $a < b$ και έναν φυσικό αριθμό $n \geq 1$. Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n συνεχόμενα υποδιαστήματα ίσου μήκους.

Σε κάθε ένα από αυτά τα υποδιαστήματα παίρνουμε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή της f και σχηματίζουμε δύο ορθογώνια. Παράδειγμα με $n = 3$ με $f \geq 0$:



Έτσι επιτυγχάνουμε μια προσέγγιση του εμβαδού από κάτω (μπλε ορθογώνια) και από πάνω (μπλε και πράσινα ορθογώνια).

Όσο πιο μεγάλο το n τόσο καλύτερη προσέγγιση έχουμε.
Παράδειγμα με $n = 6$ για $f \geq 0$:



Όπου η f είναι αρνητική μετράμε το εμβαδόν των ορθογωνίων με αρνητικό πρόσημο.

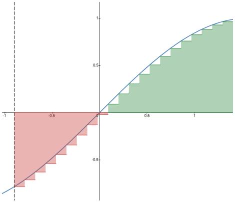
Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε n και παίρνουμε δύο ακολουθίες $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ από εμβαδά.

$L_n =$ το άθροισμα των εμβαδών όλων των μπλε ορθογωνίων

$U_n =$ το άθροισμα των εμβαδών όλων των μπλε και πράσινων ορθογωνίων

(κάτω από τον άξονα $x'x$ προσμετρώνται αρνητικά)

Παράδειγμα για τα L_n κάτω από τον $x'x$:



$L_n =$ εμβαδόν πράσινης περιοχής - εμβαδόν κόκκινης περιοχής

Ισχύουν τα εξής:

$$L_1 \leq L_2 \leq \cdots \leq L_n \leq \cdots \leq U_n \leq \cdots \leq U_2 \leq U_1$$
$$U_n - L_n \longrightarrow 0.$$

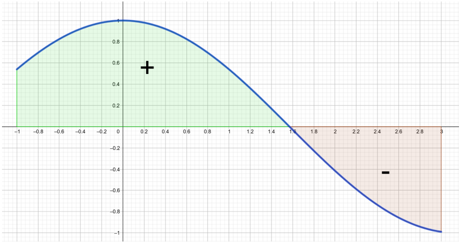
Προκύπτει ότι οι ακολουθίες $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνουν σε κάποιον αριθμό, οποίος μάλιστα είναι κοινός και για τις δύο.

Αυτός ο αριθμός ονομάζεται το *ολοκλήρωμα Riemann* η πιο απλά το *ολοκλήρωμα* της συνάρτησης $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Διαισθητικά το ολοκλήρωμα της f είναι το εμβαδόν ανάμεσα στη γραφική παράσταση της f και στον άξονα $x'x$ για $f \geq 0$.

Όπου η f είναι αρνητική το ολοκλήρωμα μετρά το εμβαδόν με αρνητικό πρόσημο.



Επέκταση της έννοιας. Το ολοκλήρωμα Riemann ορίζεται και σε μια μεγάλη κατηγορία μη συνεχών συναρτήσεων $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, αλλά όχι σε όλες τις συναρτήσεις. Εμείς όμως θα ασχοληθούμε με ολοκληρωμάτα συνεχών συναρτήσεων.

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f\colon [a,a] \to \mathbb{R}$ τότε *ορίζουμε* το ολοκλήρωμά της να είναι *μηδέν*, δηλαδή

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Χρήσιμος *συμβολισμός*: αν $a < b$ με $\int_b^a f(x)\,dx$ εννοούμε τον *αντίθετο* αριθμό του ολοκληρώματος, δηλαδή

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

(Το $\int_b^a f(x)\,dx$ παύει να έχει το νόημα εμβαδού.)

Αν η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα σύνολο που περιέχει το κλειστό διάστημα $[a,b]$ με $\int_a^b f(x)\,dx$ εννοούμε το ολοκλήρωμα του *περιορισμού της f* στο $[a,b]$.

Π.χ. αν $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορούμε πάλι να πάρουμε το $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Ιδιότητες Ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\min(f\,|[a,b]) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max(f\,|[a,b]) \cdot (b-a)$$

$$f \leq g \text{ στο } [a,b] \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

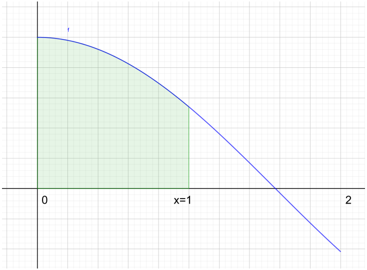
Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Θεωρούμε ότι έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Παρατηρούμε ότι $F(a) = 0$ και $F(b) = \int_a^b f(x)dx$.

Παράδειγμα: δίνεται η πιο κάτω $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, η τιμή $F(1)$ είναι το εμβαδόν της πράσινης περιοχής



Θεώρημα: (Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού - Fundamental Theorem of Calculus)

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *και την* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *με* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. *Τότε η* F *είναι συνεχής, διαφορίσιμη και*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Πόρισμα. Δίνονται δύο συναρτήσεις $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ με την f συνεχή και την F παραγωγίσιμη. Αν $F' = f$ τότε

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Με άλλα λόγια αν μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση F με $F' = f$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το $\int_a^b f(x)dx$.

Παρατηρήσεις. 1) Η διαφορά $F(b)-F(a)$ συμβολίζεται συνήθως με $F(x)\Big|_a^b$.

2) Ο τύπος $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ ισχύει και για $b \leq a$. Αυτό προκύπτει εύκολα από τον κανονικό τύπο. Π.χ. για $b=1$ και $a=2$ έχουμε

$$\int_2^1 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx = -(F(2)-F(1)) = F(1)-F(2).$$

Απόδειξη του Πορίσματος. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$. Τότε

$$F_0\,'(x) = f(x) = F\,'(x), \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

Άρα $F_0\,' = F\,'$ ή αλλιώς $(F - F_0)' = 0$. Επομένως $F - F_0 = c \in \mathbb{R}$ και

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F_0(b) = F_0(b) - F_0(a)\\ &= F_0(b) + c - (F_0(a) + c) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Παράδειγμα. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^2 dx$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \frac{x^3}{3}$ για $x \in [0, 1]$ και παρατηρούμε ότι $F\,'(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Άρα

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

Αόριστο Ολοκλήρωμα

Μια συνάρτηση $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι *παράγουσα* (anti-derivative) της $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ αν $F' = f$. Π.χ. η $F(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$ είναι παράγουσα της $f(x) = 3x^2$.

Η παράγουσα εφόσον υπάρχει δεν είναι μοναδική, για την ακρίβεια δύο παράγουσες της ίδιας συνάρτησης διαφέρουν κατά μία σταθερά.

Με τον όρο *αόριστο ολοκλήρωμα* μιας συνάρτησης f εννοούμε μια οποιαδήποτε παράγουσα της f. Συμβολίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f με $\displaystyle\int f(x)dx$.

Αιτιολόγηση συμβολισμού. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

(Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν το αόριστο ολοκλήρωμα ως το σύνολο όλων των παραγουσών.)

Αν $F' = f$ γράφουμε

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}.}$$

Αιτιολόγηση. Τα $\int f(x)dx$ και F είναι παράγουσες της συνάρτησης f επομένως διαφέρουν κατά μία σταθερά.

Η σταθερά c είναι ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός και ονομάζεται *σταθερά ολοκλήρωσης*.

Γενικά η σταθερά c παραμένει ως έχει χωρίς να την προσδιορίζουμε. Από την άλλη κάποια προβλήματα παρέχουν δεδομένα που μας επιτρέπουν τον προσδιορισμό της σταθεράς.

Παραδείγματα.

1) Να βρεθεί η εξίσωση όλων των καμπυλών της μορφής $y = F(x)$ με F διαφορίσιμη, για τις οποίες η εφαπτομένη στο σημείο (x, y) της καμπύλης έχει κλίση $2x$.

Λύση: Θέλουμε $F'(x) = 2x$ με άλλα λόγια ψάχνουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int 2xdx$. Έχουμε $\int 2xdx = x^2 + c$ όπου $c \in \mathbb{R}$, γιατί $(x^2)' = 2x$. Άρα οι εξισώσεις των καμπυλών είναι $y = x^2 + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

2) Να βρεθούν όλες οι καμπύλες του 1) που διέρχονται από το σημείο $(4, 5)$.

Λύση: Παίρνουμε την εξίσωση $y = x^2 + c$ και αντικαθιστούμε $x = 4$ και $y = 5$. Έχουμε $5 = 4^2 + c$, επομένως $c = -11$. Άρα $y = x^2 - 11$.

Στοιχειώδη αόριστα ολοκληρώματα

$$\int 0dx = c$$

$$\int 1dx = x + c$$

$$\int x^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ όπου } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c \quad \text{ή} \quad \ln(-x) + c = \ln|x| + c$$

(ανάλογα με το αν το x είναι θετικό ή αρνητικό)

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

Ιδιότητες αορίστου ολοκληρώματος

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int f(x)dx$$

Παραδείγματα.

1) $\int 3\sqrt{x} + 5x + 1dx = 3 \cdot \int x^{1/2}dx + 5 \cdot \int xdx + \int 1dx$

$$= 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + \frac{5}{2} \cdot x^2 + x + c = 2x^{3/2} + \frac{5}{2} \cdot x^2 + x + c$$

2) $\int x^{-4} + 3\cos x dx = \int x^{-4}dx + 3 \cdot \int \cos x dx = -\frac{x^{-3}}{3} + 3\sin x + c.$

Οι ίδιες ιδιότητες χρησιμοποιούνται και για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος. Παράδειγμα:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 5x^2 - 2\cos x dx &= 5 \cdot \int_0^1 x^2 dx - 2 \cdot \int_0^1 \cos x dx \\
&= \frac{5}{3} \cdot x^3 - 2\sin x \, \Big|_0^1 \\
&= \frac{5}{3} \cdot 1^3 - 2\sin 1 - (0 - \sin 0) = \frac{5}{3} - 2\sin 1.
\end{aligned}
$$

Ο φυσικός λογάριθμος ως ολοκλήρωμα

Παρατηρούμε ότι

$$\int_a^x \frac{1}{t} dt = \ln t\Big|_a^x = \ln x - \ln a \quad \text{όπου } x, a > 0.$$

Για $a = 1$ το προηγούμενο ισούται με $\ln x - \ln 1 = \ln x$. Επομένως καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\boxed{\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \quad x > 0}$$

(Μερικοί θεωρούν το πιο πάνω ως τον *ορισμό* του φυσικού λογαρίθμου.)

Τεχνικές Ολοκλήρωσης

(*για την ακρίβεια:* Τεχνικές εύρεσης παράγουσας)

Α) Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Παράδειγμα. Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int 2x \cos x^2 dx.$$

Παρατηρούμε ότι $(x^2)' = 2x$ και από τον κανόνα της αλυσίδας $(\sin x^2)' = 2x \cos x^2$. Με άλλα λόγια

$$I = \sin x^2 + c.$$

Για να καταλήξουμε στη συνάρτηση sin ολοκληρώσαμε τη συνάρτηση cos.

Γενικότερα αν $F' = f$ ισχύει ο εξής κανόνας:

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση $u = g(x)$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du \quad \text{όπου } u = g(x)$$

$$= F(u) + c = F(g(x)) + c.$$

Στην πράξη ο κανόνας εφαρμόζεται ως εξής:

1. "Αναγνωρίζουμε" τη $g(x)$ και αντικαθιστούμε $u = g(x)$.
2. Δεν ξεχνάμε να αντικαταστήσουμε το dx.
   Μνημονικός κανόνας:
   $$“\ \frac{du}{dx} = g'(x) \iff du = g'(x)dx \iff dx = \frac{du}{g'(x)}\ ”$$
3. Προκύπτει ένα πιο απλό ολοκλήρωμα με μεταβλητή u. Δεν ξεχνάμε στο τέλος να αντικαταστήσουμε πίσω $u = g(x)$.

Παραδείγματα: 1) $I = \int x \cdot \sqrt{x+1}dx$. Θέτουμε $u = x+1$ και έχουμε $du = dx$ και $x = u-1$. Άρα

$$I = \int (u-1) \cdot \sqrt{u}\ du = \int u^{3/2} - u^{1/2} du$$
$$= \frac{2}{5} \cdot u^{5/2} - \frac{2}{3} \cdot u^{3/2} + c = \frac{2}{5} \cdot (x+1)^{5/2} - \frac{2}{3} \cdot (x+1)^{3/2} + c.$$

2) $J = \int x \cdot (x^2+1)^{1/3} dx$. Θέτουμε $u = x^2+1$ και έχουμε $du = 2xdx$, δηλαδή $xdx = \frac{1}{2} \cdot du$. Άρα

$$J = \int \frac{1}{2} \cdot u^{1/3} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot u^{4/3} + c = \frac{3}{8} \cdot (x^2+1)^{4/3} + c.$$

Εκτός από το αόριστο η τεχνική εφαρμόζεται και στο συνηθισμένο (ορισμένο) ολοκλήρωμα. Όμως πρέπει να αντικαταστήσουμε και τα άκρα ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα: $I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$. Αντικαθιστούμε $u = \sin x$ και έχουμε $du = \cos x dx$. Άκρα ολοκλήρωσης: όταν $x = 0$ έχουμε $u = 0$ και όταν $x = \pi/2$ έχουμε $u = 1$. Άρα

$$I = \int_0^1 u^3 du = \frac{u^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} .$$

Η μέθοδος της αντικατάστασης μπορεί να εφαρμοστεί και αντίστροφα, δηλαδή να αντικαταστήσουμε $x = \varphi(u)$. Πρέπει όμως να ορίζεται η φ^{-1} τουλάχιστον σε κάποιο διάστημα (και το ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να ληφθεί μόνο πάνω σε ένα τέτοιο διάστημα). Παραδείγματα θα δούμε αργότερα.

Β) Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Θεωρούμε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g. Η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παράγουσα της $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. Με άλλα λόγια η $f \cdot g$ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $f' \cdot g + f \cdot g'$, δηλαδή

$$\int \Big(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \Big) \; dx = f(x) \cdot g(x)$$

$$\int f'(x) \cdot g(x) \; dx + \int f(x) \cdot g'(x) \; dx = f(x) \cdot g(x)$$

οπότε καταλήγουμε:

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x) \cdot g'(x) \; dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \; dx$$

Η συγκεκριμένη τεχνική εφαρμόζεται κυρίως όταν η f είναι πολυώνυμο και η g' είναι η e^x ή γενικότερα $e^{\alpha x}$, ή $\sin(\alpha x)$ ή $\cos(\alpha x)$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Σε αυτές τις περιπτώσεις η g προκύπτει εύκολα και δεν είναι πολύ "διαφορετική" από την g'.

Τότε το ολοκλήρωμα $\int f'(x) \cdot g(x)\, dx$ είναι απλούστερο από το $\int f(x) \cdot g'(x)\, dx$ γιατί οι συναρτήσεις g και g' είναι περίπου οι ίδιες και το πολυώνυμο f' είναι μειωμένο κατά ένα βαθμό από το f.

Παραδείγματα. 1) $I_1 = \int xe^x\, dx$. Τότε

$$\int x \cdot e^x\, dx = x \cdot e^x - \int x' \cdot e^x\, dx \quad \text{παράγωγος(κόκκινου)} = \text{μπλε}$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x\, dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x + c.$$

2) $I_2 = \int x^2 \cdot e^x \; dx$. Τότε

$$\int x^2 \cdot e^x \; dx = x^2 \cdot e^x - \int (2x) \cdot e^x \; dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \int x e^x \; dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2I_1 = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$$

3) $I_3 = \int x \cdot \sin(3x) \; dx$. Τότε

$$\int x \cdot \sin(3x) \; dx = x \cdot \frac{-\cos(3x)}{3} - \int x' \cdot \frac{-\cos(3x)}{3} \; dx$$

$$= -x \cdot \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \int \cos(3x) \; dx$$

$$= -x \cdot \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(3x)}{3} + c$$

$$= -x \cdot \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\sin(3x)}{9} + c.$$

Η τεχνική εφαρμόζεται και στο συνηθισμένο (ορισμένο) ολοκλήρωμα ως εξής:

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες με άκρα

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\ dx = f(x)\cdot g(x)\ \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\ dx$$

Παράδειγμα.

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{2x}\ dx &= x\cdot\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 1\cdot\frac{e^{2x}}{2}\ dx\\ &= \left(1\cdot\frac{e^2}{2}-0\right) - \frac{e^{2x}}{4}\Big|_0^1\\ &= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4}-\frac{e^0}{4}\right)\\ &= \frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}\ .\end{aligned}$$