Όριο - Παράγωγος

Βασίλειος Γρηγοριάδης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Όριο Συνάρτησης - Διαισθητική Προσέγγιση

1. Ορίζεται η έννοια του ορίου συνάρτησης f όταν το x τείνει σε κάποιο x_0 ή στο $\pm\infty$. Συμβολισμός: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ - το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 είναι ℓ.
2. Διαισθητικά σημαίνει όταν το x βρίσκεται "κοντά" στο x_0 τότε η τιμή $f(x)$ βρίσκεται κοντά στο όριο.
3. Το σημείο x_0 δεν μπορεί να είναι εντελώς τυχαίο. Απαραίτητη προϋπόθεση για τον ορισμό του ορίου: πρέπει να υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ του πεδίου ορισμού που να συγκλίνει στο x_0 και να ικανοποιεί $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \geq 1$.
4. Μπορεί το x_0 να μην είναι στοιχείο του πεδίου ορισμού της f.

Παραδείγματα: 1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = x$. Τότε μπορούμε να μιλήσουμε για το όριο της f όταν το x τείνει στο 0, όταν το x τείνει στο $+\infty$, όταν το x τείνει στο 200, αλλά όχι όταν το x τείνει στο -1.

2) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0,1] \cup \{2\} \to \mathbb{R} : f(x) = x$. Τότε μπορούμε να μιλήσουμε για το όριο της f όταν το x τείνει σε κάποιο $x_0 \in [0,1]$. Αλλά δεν μπορούμε να μιλήσουμε για το όριο της f όταν το x τείνει στο 2, γιατί δεν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ του πεδίου ορισμού της f που να συγκλίνει στο 2 και να ικανοποιεί $x_n \neq 2$ για κάθε $n \geq 1$.

Ιδιότητες: Στα όρια ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες:

Π.χ.

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Όριο και Συνέχεια: Στην περίπτωση που το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και μπορούμε να πάρουμε το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Όριο και σύνθεση συναρτήσεων: Αν υπάρχει το όριο $a = \lim_{x\to x_0} f(x)$ και η g είναι συνεχής στο a τότε

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = g(a).$$

Θεώρημα: (Αρχή Μεταφοράς για τα όρια)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ *και* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *για το οποίο υπάρχει* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *από στοιχεία του* A *που συγκλίνει στο* x_0 *και* $x_n \neq x_0$ *για κάθε* $n \geq 1$*. Τότε για κάθε συνάρτηση* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *και κάθε* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell.$
2. *Για κάθε ακολουθία* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *από στοιχεία του* A *με την ιδιότητες* $x_n \to x_0$ *και* $x_n \neq x_0$ *για κάθε* $n \geq 1$, *ισχύει* $f(x_n) \to \ell$.

Η Αρχή Μεταφοράς για τα όρια μας βοηθά να υπολογίσουμε όρια συναρτήσεων.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: με

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 17, & x = 0. \end{cases}$$

Δείχνουμε ότι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών που συγκλίνει στο 0 με $x_n \neq 0$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε $f(x_n) = x_n^2 \to 0$. Άρα $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Η Αρχή Μεταφοράς βοηθά στο να δείξουμε τη μη-ύπαρξη του ορίου.

Κριτήριο μη-ύπαρξης ορίου. Αν $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ και υπάρχουν δύο ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ στο A με τις ιδιότητες:

1. $x_n \neq x_0$ και $y_n \neq x_0$ για κάθε $n \geq 1$,
2. $x_n \to x_0$ και $y_n \to x_0$, και
3. $f(x_n) \to \ell_1$, $f(y_n) \to \ell_2$ και $\ell_1 \neq \ell_2$ (μπορεί $\ell_1, \ell_2 = \pm\infty$),

τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} : f(x) = 1/x$. Δείχνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Πρέπει να βρούμε δύο κατάλληλες ακολουθίες. Παίρνουμε $x_n = 1/n$ και $y_n = -1/n$. Τότε $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, $x_n \neq 0$ και $y_n \neq 0$ για κάθε $n \geq 1$.
Επιπλέον $f(x_n) = n \to +\infty$ και $f(y_n) = -n \to -\infty$. Άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Μερικοί κανόνες πράξεων με το άπειρο:

$$\infty + \infty = \infty \quad -\infty - \infty = -\infty \quad \infty \cdot \infty = \infty$$

$$(-\infty)\cdot(-\infty) = \infty \quad (-\infty)\cdot\infty = -\infty \quad \infty^{\infty} = \infty$$

Π.χ. $\infty + \infty = \infty$ σημαίνει πως αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ τότε $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \infty$.

Update: 16 Δεκ.

$$\infty + x = x + \infty = \infty \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$-\infty + x = x - \infty = -\infty \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty \quad \text{για κάθε } x > 0$$

$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty \quad \text{για κάθε } x < 0$$

$$(-\infty)\cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty \quad \text{για κάθε } x > 0$$

$$(-\infty)\cdot x = x \cdot (-\infty) = \infty \quad \text{για κάθε } x < 0$$

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

Απροσδιόριστες μορφές ορίων:

$$\infty - \infty \quad -\infty + \infty \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \frac{0}{0} \quad \pm\infty \cdot 0 \quad 0^0 \quad \infty^0 \quad 1^\infty \quad 0^\infty$$

Απροσδιόριστη μορφή, π.χ. για το $\infty - \infty$ σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις f_1, f_2 και g_1, g_2 με $\lim_{x \to x_0} f_i(x) = \lim_{x \to x_0} g_i(x) = \infty$, $i = 1, 2$, αλλά $\lim_{x \to x_0} [f_1(x) - g_1(x)] \neq \lim_{x \to x_0} [f_2(x) - g_2(x)]$.

Π.χ. $f_1(x) = 1/x^2 = g_2(x)$, $g_1(x) = 1/x^2 + 1 = f_2(x)$ για $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, παίρνουμε όρια στο $x_0 = 0$.

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \to \infty} f_i(x) = \lim_{x \to \infty} g_i(x) = \infty$, $i = 1, 2$ και πως $f_1(x) - g_1(x) = -1$, $f_2(x) - g_2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πλευρικά όρια. Ορίζονται οι έννοιες του ορίου όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά και του ορίου όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά (πλευρικά όρια).

Ισχύουν τα ανάλογα με πριν. Απλώς όπου έχουμε ακολουθίες πρέπει αυτές να βρίσκονται στην αντίστοιχη πλευρά του x_0. Π.χ. Για να ορίζεται η έννοια του ορίου της f όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά πρέπει να υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ στο πεδίο ορισμού της f με $x_0 < x_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Παράγωγος συνάρτησης

1. Ορίζεται η έννοια της παραγώγου συνάρτησης $f\colon A \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο x_0.
2. Τώρα το A είναι αναγκαστικά διάστημα και το x_0 ανήκει στο A.
3. Για να ορίσουμε την παράγωγο της f στο σημείο x_0 θεωρούμε αρχικά τη συνάρτηση

$$\varphi : A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R} : \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Επειδή υποθέσαμε ότι το A είναι διάστημα υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ στοιχείων του A που συγκλίνει στο x_0 και ικανοποιεί $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως ορίζεται η έννοια του ορίου της φ όταν το x τείνει στο x_0.

Ορισμός:

Έστω A ένα διάστημα του $\mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Η *συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0* ή αλλιώς *διαφορίσιμη στο x_0* αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\ .$$

Όταν υπάρχει το πιο πάνω όριο συμβολίζεται με $f'(x_0)$ ή $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ και ονομάζεται *παράγωγος της f στο x_0*.

Η f λέγεται παραγωγίσιμη ή αλλιώς διαφορίσιμη αν υπάρχει η παράγωγος $f'(x)$ σε κάθε $x \in A$.

Διαισθητικά η παράγωγος της f στο x_0 είναι η κλίση της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Βασικές ιδιότητες:

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0.
2. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά, π.χ. $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
3. Μάλιστα γνωρίζουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχείς σε κάθε $x \in [0,1]$ αλλά δεν παραγωγίζονται σε κανένα $x \in [0,1]$.
4. Ισχύουν όλοι οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης, π.χ. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
   $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ κ.τ.λ.
5. Επομένως σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο με βάση τους γνωστούς κανόνες. Σε κάποιες όμως *εξαιρετικές περιπτώσεις* η παράγωγος υπολογίζεται με βάση τον ορισμό.

Οι παράγωγοι μερικών γνωστών συναρτήσεων

	Συνάρτηση f	Παράγωγος f'
1	Σταθερή	0
2	x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}
3	x^q $(q \in \mathbb{Q},\ x > 0)$	qx^{q-1} $(q \in \mathbb{Q},\ x > 0)$
4	$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$na_n x^{n-1} + \cdots + a_1$
5	$\sin x$	$\cos x$
6	$\cos x$	$-\sin x$
7	$\tan x$	$1/\cos^2(x)$
8	e^x	e^x
9	a^x $(a > 0)$	$a^x \cdot \ln(a)$ $(a > 0)$
10	$\ln x$ $(x > 0)$	$1/x$ $(x > 0)$

Σημείωση: Με τις συναρτήσεις e^x, a^x και $\ln x$ θα ασχοληθούμε πιο εκτενώς σε μεταγενέστερο μάθημα.

Θεώρημα: (de L' Hospital)

Θεωρούμε ένα ανοικτό διάστημα I, ένα σημείο x_0 που ανήκει στο I ή είναι άκρο του I και συναρτήσεις $f, g : I \to \mathbb{R}$. (Μπορεί να έχουμε $I = (-\infty, 0)$ και $x_0 = -\infty$.) Υποθέτουμε ότι έχουμε τα εξής:

1. οι f, g είναι παραγωγίσιμες σε όλο το I εκτός ίσως από το x_0,
2. $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ με $x \neq x_0$,
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$,
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Θεώρημα: (Θεώρημα Μέσης Τιμής)

Έστω $a < b$ και συνάρτηση $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Ειδική Περίπτωση (Θεώρημα του Rolle): *Αν $a < b$, η $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και αν $f(a) = f(b)$ τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $f'(\xi) = 0$.*

Πόρισμα: Αν $a < b$, η $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Απόδειξη: Έστω $c, d \in [a, b]$ με $c < d$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (c, d)$ με $f'(\xi) = \dfrac{f(d) - f(c)}{d - c}$. Αφού $f'(\xi) = 0$ έχουμε $f(c) = f(d)$.

Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης

Θεώρημα: (Αντίστροφης Συνάρτησης για Παραγωγίσιμες Συναρτήσεις)

Έστω $a < b$ *και* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *συνεχής, 1-1 και παραγωγίσιμη στο* $x_0 \in (a, b)$.
Αν $f'(x_0) \neq 0$ *τότε η* $f^{-1} : f((a, b)) \to (a, b)$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $y_0 = f(x_0)$ *και η παράγωγός της δίνεται από τη σχέση*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση
$f\colon (0,\infty) \to (0,\infty) : f(x) = x^2$. Η f είναι 1-1 και παραγωγίσιμη με
$f'(x) = 2x$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η
$f^{-1} : (0,\infty) \to (0,\infty) : f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
Από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης έχουμε

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x}$$

όπου $y = f(x) = x^2, \ \in (0,\infty)$.
(Παρατηρούμε ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$.)
Άρα $x = \sqrt{y}$ και επομένως

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \cdot y^{-1/2}.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις sin, cos, και tan περιορισμένες κατάλληλα είναι 1-1 και επί.

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις sin, cos, και tan περιορισμένες κατάλληλα είναι 1-1 και επί. Συμβολίζουμε με arcsin, arccos και arctan τις αντίστοιχες αντίστροφες συναρτήσεις:

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \qquad \arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}. \qquad \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις sin, cos, και tan περιορισμένες κατάλληλα είναι 1-1 και επί. Συμβολίζουμε με arcsin, arccos και arctan τις αντίστοιχες αντίστροφες συναρτήσεις:

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \qquad \arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}. \qquad \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Οι αντίστροφες συναρτήσεις συμβολίζονται στα ελληνικά ως Τοξημ, Τοσυν και Τοξεφ αντίστοιχα. Διαβάζονται "τόξο-ημίτονο", "τόξο-συνημίτονο" και "τόξο-εφαπτομένη" αντίστοιχα.

Υπολογισμός παραγώγου της συνάρτησης arcsin.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1] : f(x) = \sin(x)$. Είναι συνεχής, 1-1 και παραγωγίσιμη. Έστω $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, εξετάζουμε που έχουμε $f'(x) = 0$.

Ισχύει $f'(x) = \cos x$ άρα $f'(x) = 0$ ακριβώς όταν $x = \pm\pi/2$.

Επομένως $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Θεωρούμε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ και $y = \sin x \in (-1, 1)$. Από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης η arcsin είναι παραγωγίσιμη στο y και

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x}.$$

Τέλος εκφράζουμε το $\cos x$ ως συνάρτηση του y. Από τη σχέση $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ βρίσκουμε $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\sqrt{1 - y^2}$.

Επειδή $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\cos x > 0$ άρα παίρνουμε το $\sqrt{1 - y^2}$.

Καταλήγουμε:

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad y \in (-1, 1).$$

Η παράγωγος της arcsin δεν υπάρχει στα $y = \pm 1$.

Τύποι παραγώγων αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1,1)$$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1,1)$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$