

Συναρτήσεις - Συνέχεια

Βασίλειος Γρηγοριάδης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Συναρτήσεις

Ορισμός:

Συνάρτηση από ένα μη-κενό σύνολο A σε ένα μη-κενό σύνολο B είναι μια αντιστοίχιση f μεταξύ των στοιχείων του A και κάποιων στοιχείων του B .

Το A καλείται **πεδίο ορισμού** της f και το B **πεδίο τιμών**.

Βασικός κανόνας: Σε **κάθε** $x \in A$ αντιστοιχεί **ακριβώς ένα** $y \in B$ μέσω της f .

Συμβολισμοί: Με $f: A \rightarrow B$ εννοούμε ότι η f είναι συνάρτηση από το A στο B . Αν $x \in A$ συμβολίζουμε με $f(x)$ το μοναδικό y που αντιστοιχεί στο x μέσω της f .

Παραδείγματα:

- 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^4 - x + 5$
- 2 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^4 - x + 5$ (ακολουθία)
- 3 $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^{-1}$

Ακόμα ένας συμβολισμός: Κάποιες φορές χρησιμοποιούμε και το σύμβολο \mapsto για να ορίσουμε την τιμή $f(x)$:

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{(x - 4)(x + 3)}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 4)(x + 3)}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Παρατηρήσεις:

- 1 Οι συναρτήσεις που μελετάμε συνήθως ορίζονται σε υποσύνολα του \mathbb{R} και παίρνουν πραγματικές τιμές. **Τίποτα δεν εμποδίζει όμως** τα πεδία ορισμού και τιμών να είναι τυχαία σύνολα, π.χ. σύνολα από πίνακες.
- 2 Οι συναρτήσεις που μελετάμε συνήθως ορίζονται μέσα από κάποιο τύπο, π.χ. $f(x) = x^2$. **Ούτε αυτό όμως είναι υποχρεωτικό.** Μια συνάρτηση δεν είναι απαραίτητο να ορίζεται μέσω κάποιου τύπου.

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ η **εικόνα** της f είναι το σύνολο

$$f(A) = \{ y \in B \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A \}.$$

Πιο γενικά αν $I \subseteq A$ τότε η **εικόνα του συνόλου I** μέσω της f είναι το σύνολο

$$f(I) = \{ y \in B \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in I \}.$$

Η $f: A \rightarrow B$ είναι **επί** συνάρτηση αν $f(A) = B$ και **1-1** συνάρτηση αν:

για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$,

ισοδύναμα

για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει $x_1 = x_2$.

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ 1-1 και επί τότε ορίζεται η **αντίστροφη συνάρτηση** $f^{-1}: B \rightarrow A$ ως εξής:

$$f^{-1}(y) = \text{το μοναδικό } x \in A \text{ με } f(x) = y.$$

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) : x \mapsto x^2$ είναι 1-1 και επί με αντίστροφη την $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) : f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Περιορισμός συνάρτησης: Δίνεται μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ και X ένα μη-κενό υποσύνολο του A . Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h: X \rightarrow B : h(x) = f(x)$. Η h ονομάζεται **περιορισμός της f** στο σύνολο X και συνήθως συμβολίζεται με $f|X$. Η f ονομάζεται **επέκταση της h** .

Σύνθεση συναρτήσεων: Δίνονται δύο συναρτήσεις $f: X \rightarrow Y$ και $g: Y \rightarrow Z$. Τότε ορίζεται η σύνθετη συνάρτηση $h: X \rightarrow Z : x \mapsto g(f(x))$. Η h συμβολίζεται ως $g \circ f$ και διαβάζεται με διαφορετικούς τρόπους: "g συντεθειμένη με την f", "g της f", "g κύκλος f" κ.λ.π.

Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν τη σύνθεση περιορίζοντας κατάλληλα τα πεδία ορισμού: αν $f: A \rightarrow B$ και $g: C \rightarrow Z$ και το σύνολο $X = \{ x \in A \mid f(x) \in C \}$ είναι μη-κενό, τότε ορίζεται η $g \circ f: X \rightarrow Z : x \mapsto g(f(x))$.

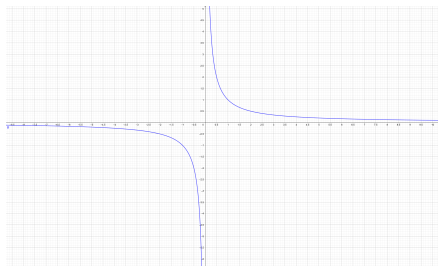
Στην ουσία όμως είναι **σύνθεση των περιορισμών** $g|f(X)$ και $f|X$.

Η **γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow B$ είναι το εξής υποσύνολο του $A \times B$,

$$C_f = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = f(x) \}.$$

Στην περίπτωση όπου τα A, B είναι υποσύνολα του \mathbb{R} έχουμε $C_f \subseteq \mathbb{R}^2$ και μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση με βάση ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

Π.χ. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 1/x$.



Συνέχεια συνάρτησης - Διαισθητική Προσέγγιση

- 1 Η έννοια της συνέχειας ορίζεται (μεταξύ άλλων) για συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου το A είναι **τυχαίο** υποσύνολο του \mathbb{R} .
- 2 Διαισθητικά μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ αν για κάθε $x \in A$ που είναι "κοντά" στο x_0 η τιμή $f(x)$ είναι "κοντά" στο $f(x_0)$.
- 3 Μελετάμε συνήθως τη συνέχεια όταν το **πεδίο ορισμού** είναι:
α) ένα **διάστημα**, π.χ. $A = [0, 1)$, $A = (-\infty, 8]$,
 $A = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$,
β) **ένωση διαστημάτων** π.χ. $A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- 4 Για τις συναρτήσεις που ορίζονται σε διάστημα ή σε ένωση (μη-τετριμμένων) **διαστημάτων**, συνέχεια σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f δεν "διακόπτεται" γύρω από το x_0 .
- 5 Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in A$.

Βασικές Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

A) Άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων.

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A' \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A \cap A'$. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 τότε:

- 1 οι συναρτήσεις $f \pm g: A \cap A' \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \pm g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0 ,
- 2 οι $f \cdot g, f/g: A \cap A' \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x), f(x)/g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0 ,
(στο πηλίκο θεωρούμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A \cap A'$),
- 3 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\lambda f: A \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lambda \cdot f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 .

B) Σύθεση συνεχών συναρτήσεων.

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και αν η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύθεση $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 .

Γ) Θεμελιώδεις συνεχείς συναρτήσεις.

- 1 οι σταθερές συναρτήσεις, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$,
- 2 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^n$, όπου $n \geq 1$,
- 3 όλα τα πολυώνυμα,
- 4 όλες οι ρητές συναρτήσεις στα σημεία που ορίζονται, (ρητή είναι μια συνάρτηση της μορφής $f = \frac{p}{q}$ όπου τα p, q είναι πολυώνυμα),
- 5 η συνάρτηση της n -οστής ρίζας, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, όπου $n \geq 1$,
- 6 η συνάρτηση της απόλυτου τιμής, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$,
- 7 όλες οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις \sin (ημίτονο), \cos (συνημίτονο) και \tan (εφαπτομένη) στα σημεία που ορίζονται.

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές, π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \quad \text{όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$x^2$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές, π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \quad \text{όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$3x^2$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές, π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \quad \text{όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$3x^2 + 1$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές, π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \quad \text{όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$\sqrt{3x^2 + 1}$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές, π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$

$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \quad \text{όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$\cos\left(\sqrt{3x^2 + 1}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές, π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$
$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \quad \text{όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Άλλα παραδείγματα:

$$\cos\left(\sqrt{3x^2 + 1}\right) / \left(\sqrt{(x-2)(x+3)}\right), \text{ για } x \neq -3, 2.$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα

Θεώρημα: (Ενδιάμεσης τιμής)

Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ($a < b$). Τότε για κάθε y γνησίως ανάμεσα στις τιμές $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει $x \in (a, b)$ με $f(x) = y$.

2η ισοδύναμη διατύπωση. Έστω I διάστημα του \mathbb{R} και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η εικόνα $f(I)$ είναι επίσης διάστημα.

Εφαρμογή: Ύπαρξη n -οστης ρίζας. Έστω $y > 0$, και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Τότε υπάρχει μοναδικό $x > 0$ με $x^n = y$, δηλαδή $x = \sqrt[n]{y}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό $b > \max\{1, y\}$ (Αρχιμήδεια Ιδιότητα), οπότε θα έχουμε $b^n > b > y$ και τη συνάρτηση $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^n$. Έχουμε $f(0) = 0$ και $f(b) = b^n$. Άρα $y \in (f(0), f(b))$ και από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $x \in (0, b)$ με $f(x) = y$, δηλαδή $x^n = y$.
(Η μοναδικότητα ισχύει επειδή η f είναι 1-1.)

Θεώρημα: (Συνεχούς Αντίστροφης Συνάρτησης)

Έστω I διάστημα και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής 1-1 συνάρτηση. Τότε

- 1 Η f είναι γνησίως μονότονη και
- 2 Η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα **χαρακτηρίζει** την ιδιότητα της συνέχειας με βάση τη **σύγκλιση ακολουθιών**. Μπορεί επομένως να χρησιμοποιηθεί στη θέση του ορισμού της συνέχειας).

Θεώρημα: (Αρχή Μεταφοράς)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in A$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1 Η f είναι συνεχής στο x .
- 2 Για **κάθε** ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ από στοιχεία του A με την ιδιότητα $x_n \rightarrow x$ ισχύει $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Η Αρχή Μεταφοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ιδιότητες της συνέχειας χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες της σύγκλισης ακολουθιών.

Παράδειγμα: Αν οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $x \in A$ τότε και η συνάρτηση $f + g: A \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(t) + g(t)$ είναι συνεχής στο x .

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ακολουθία στοιχείων του A με $x_n \rightarrow x$. Πρέπει να δείξουμε ότι $(f + g)(x_n) \rightarrow (f + g)(x)$.

Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x και $x_n \rightarrow x$ έχουμε από την Αρχή Μεταφοράς $f(x_n) \rightarrow f(x)$ και $g(x_n) \rightarrow g(x)$. Άρα $f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(x) + g(x)$, δηλαδή $(f + g)(x_n) \rightarrow (f + g)(x)$.

Η Αρχή Μεταφοράς χρησιμοποιείται επίσης για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f **δεν** είναι συνεχής σε κάποιο x_0 .

Αρκεί να **βρούμε** μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ στο πεδίο ορισμού της f με τις ιδιότητες $x_n \rightarrow x_0$ και $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Δείχνουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο 0. Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = 1/n$, $n \geq 1$. Τότε $x_n \rightarrow 0$ αλλά $f(x_n) = 1 \not\rightarrow 0 = f(0)$.