ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
Ασκήσεις
18β. Ευθείες-Επίπεδα

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

Άσκηση 14

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $M_1(1,1,1)$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\vec{p} = (1,2,3)$ και $\vec{q} = (3,3,3)$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

Λύση

Η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6y - 3x - 3z = 0$$

Άσκηση 15

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $M_1(1,1,1)$ και $M_2(1,2,3)$ και είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{p} = (3,3,3)$.

Λύση Η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$[\vec{r} - \vec{r_1}, \vec{r_2} - \vec{r_1}, \vec{a}] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6y - 3x - 3z = 0$$

Άσκηση 16

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $M_1(1,1,1)$ και $M_2(1,2,3)$ και είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{p} = (0,1,2)$.

Λύση Η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$[\vec{r} - \vec{r_1}, \vec{r_2} - \vec{r_1}, \vec{a}] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Η ορίζουσα έχει δύο ίσες γραμμές άρα είναι ίση με μηδέν. Επομένως, δεν μπορούμε να βρούμε την ζητούμενη εξίσωση του επιπέδου. Αυτό ήταν αναμενόμενο παρατηρώντας τα διανύσματα $\vec{p} = (0,1,2)$ και $\overrightarrow{M_2M_1} = (0,1,2)$ τα οποία είναι παράλληλα. Έτσι από τα σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα παράλληλα στο διάνυσμα $\vec{p}$.

Άσκηση 17

$[\vec{r}-\vec{r_0}, \vec{r_1}-\vec{r_0}, \vec{a}] = 0$

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $M_0(1,2,0)$ και $M_1(0,1,3)$ και είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{a} = (1,1,1)$.

Λύση Η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 0-1 & 1-2 & 3-0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4y - 4x - 4 = 0$$

Και σε παραμετρική μορφή

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu \beta_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu \beta_2 = 0, \lambda, \mu \in R \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu \beta_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \cdot (0-1) + \mu \cdot 1 \\ y = 2 + \lambda \cdot (1-2) + \mu \cdot 1 = 0, \lambda, \mu \in R \\ z = 0 + \lambda \cdot (3-0) + \mu \cdot 1 \end{cases}$$

- Κάθε εξίσωση της μορφής

$$\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{\Gamma z}+\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{0}, \text{με } (A,B,\Gamma,\Delta)\neq(0,0,0)$$

είναι η **καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου** με κάθετο διάνυσμα $\vec{\eta}=(A,B,\Gamma)$.

Άσκηση 18

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $M_1(1,0,3)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\eta}=(2,-1,4)$.

Λύση

Η εξίσωση της μορφής $2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\mathbf{4}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{0}$ είναι η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta}=(2,-1,4)$. Και αφού το σημείο $M_1(1,0,3)$ είναι σημείο του επιπέδου, τότε θα ικανοποιεί την εξίσωση $2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\mathbf{4}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{0}$, δηλαδή

$$2\cdot\mathbf{1}-\mathbf{0}+\mathbf{4}\cdot\mathbf{3}+\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{\Delta}=-\mathbf{14}$$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\boxed{2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\mathbf{4}\boldsymbol{z}=\mathbf{14}}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot (x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t \cdot (y_1 - y_0), t \in R. \\ z = z_0 + t \cdot (z_1 - z_0) \end{cases}$$

Άσκηση 19

Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας του R^3 που διέρχεται από τα σημεία $M_0(1,-2,1)$ και $M_1(2,1,-3)$.

Λύση

Οι εξισώσεις είναι

$$\begin{cases} x = 1 + t \cdot (2 - 1) \\ y = -2 + t \cdot (1 + 2) \\ z = 1 + t \cdot (-3 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t, t \in R \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

Άσκηση 20

Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας του R^3 που είναι τομή των επιπέδων $x - z = 0, x + y + z = -1.$

Λύση

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ z + y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -1 - 2z \end{cases}$$

Θέτουμε $z = t$ και προκύπτει:

$$\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t\,, t \in R \\ z = t \end{cases}}$$

Άσκηση 21

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $M_0(1,2,-1)$, $M_1(2,3,1)$ και $M_2(3,-1,2)$.

Λύση Η εξίσωση του επιπέδου είναι της μορφής $\boldsymbol{Ax+By+\Gamma z+\Delta=0}$.

Άρα τα τρία σημεία που ανήκουν σε αυτό θα ικανοποιούν και την εξίσωση του επιπέδου, δηλαδή προκύπτει ένα σύστημα τριών εξισώσεων με άγνωστους $\boldsymbol{A, B, \Gamma, \Delta}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{A\cdot 1+B\cdot 2+\Gamma\cdot(-1)+\Delta=0} \\ \boldsymbol{A\cdot 2+B\cdot 3+\Gamma\cdot 1+\Delta=0} \\ \boldsymbol{A\cdot 3+B\cdot(-1)+\Gamma\cdot 2+\Delta=0} \end{cases}$$

Και συνεπώς, η λύση δεν είναι μοναδική. Θέτοντας $\boldsymbol{\Delta=-16}$ βρίσκουμε, αν αντικαταστήσουμε, $\boldsymbol{\Gamma=-5, B=1, A=9}$.

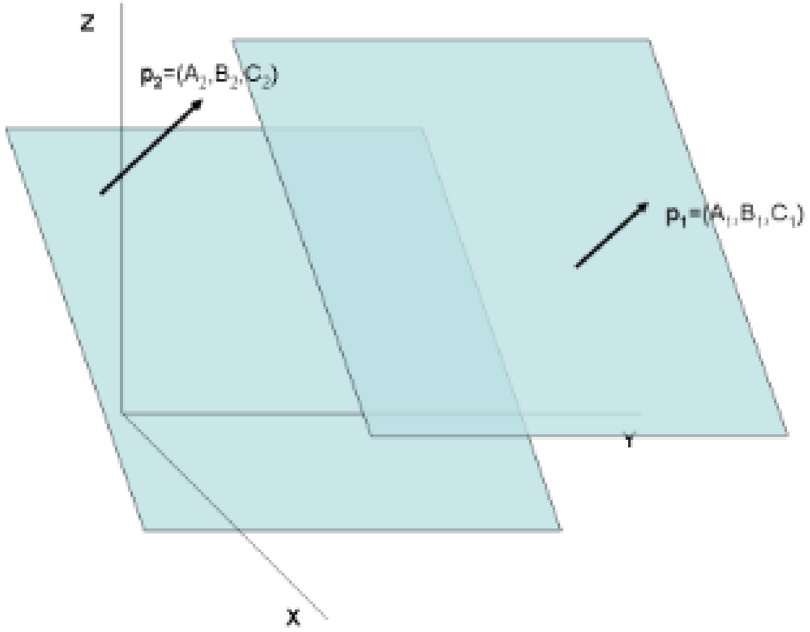
Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση είναι $\boxed{\boldsymbol{9x+y-5z-16=0}}$.

Άσκηση 22

Να δείξετε ότι δύο επίπεδα $\boldsymbol{E_1}$: $\boldsymbol{A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0}$ και $\boldsymbol{E_2}$: $\boldsymbol{A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0}$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν $\frac{\boldsymbol{A_1}}{\boldsymbol{A_2}} = \frac{\boldsymbol{B_1}}{\boldsymbol{B_2}} = \frac{\boldsymbol{\Gamma_1}}{\boldsymbol{\Gamma_2}}$

Λύση

Το επίπεδο $\boldsymbol{E_1}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{\eta_1} = (\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{\Gamma_1})$ το επίπεδο $\boldsymbol{E_2}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{\eta_2} = (\boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{B_2}, \boldsymbol{\Gamma_2})$. Έχουμε λοιπόν: $\boldsymbol{E_1} \,//\, \boldsymbol{E_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{\eta_1} \,//\, \overrightarrow{\eta_2} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{A_1}}{\boldsymbol{A_2}} = \frac{\boldsymbol{B_1}}{\boldsymbol{B_2}} = \frac{\boldsymbol{\Gamma_1}}{\boldsymbol{\Gamma_2}}$



Άσκηση 23

Να δείξετε ότι δύο επίπεδα $\boldsymbol{E_1}$: $\boldsymbol{A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0}$ και $\boldsymbol{E_2}$: $\boldsymbol{A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0}$ είναι κάθετα μεταξύ τους αν και μόνο αν $\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2 + \Gamma_1\Gamma_2 = 0}$

Λύση

Το επίπεδο $\boldsymbol{E_1}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{\eta_1} = (\boldsymbol{A_1, B_1, \Gamma_1})$ το επίπεδο $\boldsymbol{E_2}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{\eta_2} = (\boldsymbol{A_2, B_2, \Gamma_2})$. Έχουμε λοιπόν: $\boldsymbol{E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\eta_1} \perp \overrightarrow{\eta_2} \Leftrightarrow < \overrightarrow{\eta_1}, \overrightarrow{\eta_2} > 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + \Gamma_1\Gamma_2 = 0}$