ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
Ασκήσεις
18α. Ευθείες-Επίπεδα

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

Άσκηση 1

Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $P(1,0,3)$και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (2,-1,4)$.

Λύση

Η **καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου** είναι της μορφής $\boldsymbol{Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0}$ με κάθετο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B, \Gamma)$.

Άρα η εξίσωση γίνεται $2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{4z} + \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{0}$.

Οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση, επομένως

$$2 \cdot \boldsymbol{1} - \boldsymbol{0} + \boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{3} + \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Delta} = -\boldsymbol{14}$$

Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι $2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{4z} = \boldsymbol{14}$.

Άσκηση 2

Να βρείτε τις εξισώσεις της ευθείας του R^3 που διέρχονται από τα σημεία $(1,-2,1)$ και $(2,1,-3)$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + t \cdot (x_1 - x_0)} \\ \boldsymbol{y = y_0 + t \cdot (y_1 - y_0)}, \boldsymbol{t \in R}. \\ \boldsymbol{z = z_0 + t \cdot (z_1 - z_0)} \end{cases}$$

Λύση

Οι εξισώσεις της ευθείας είναι $\begin{cases} x = 1 + t \cdot (2-1) \\ y = -2 + t \cdot (1+2), t \in R, \\ z = 1 + t \cdot (-3-1) \end{cases}$ δηλαδή $\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + t} \\ \boldsymbol{y = -2 + 3t}, \boldsymbol{t \in R} \\ \boldsymbol{z = 1 - 4t} \end{cases}$

Άσκηση 3

Να βρείτε τις εξισώσεις της ευθείας του R^3 που είναι τομή των επιπέδων $x - z = 0$ και $x + y + z = -1$.

Λύση

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\boldsymbol{x = z}$. Αντικαθιστούμε στη δεύτερη και παίρνουμε

$$x + y + x = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -1 - 2x}$$

Θέτοντας $\boldsymbol{x = t}$, έχουμε $\boldsymbol{y = -1 - 2t}$ και $\boldsymbol{z = t, t \in R}$.

Άσκηση 4

Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου του R^3 που διέρχεται από τα σημεία $(1,2,-1), (2,3,1) \kappa\alpha\iota\ (3,-1,2)$.

Λύση

Η **καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου** είναι της μορφής $\boldsymbol{Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0}$.

Οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση, επομένως

$$\begin{cases} \boldsymbol{A \cdot 1 + B \cdot 2 - \Gamma + \Delta = 0} \\ \boldsymbol{A \cdot 2 + B \cdot 3 + \Gamma + \Delta = 0} \\ \boldsymbol{A \cdot 3 - B + \Gamma \cdot 2 + \Delta = 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A + 2B - \Gamma = -\Delta} \\ \boldsymbol{-B + 3\Gamma = \Delta} \\ \boldsymbol{-16\Gamma = -5\Delta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A = -\Delta - 2B + \Gamma} \\ \boldsymbol{B = -\Delta + 3\Gamma} \\ \boldsymbol{\Gamma = 5\Delta/16} \end{cases}$$

Η λύση δεν είναι μοναδική. Θέτοντας $\Delta = 16$ βρίσκουμε $\Gamma = 5, B = -1, A = 9$.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $\boldsymbol{9x + y - 5z - 16 = 0}$.

Άσκηση 4-β τρόπος

Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου του R^3 που διέρχεται από τα σημεία $(1,2,-1),(2,3,1) \kappa\alpha\iota\ (3,-1,2)$.

Λύση

Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Αντικαθιστούμε:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2-1 & 3-2 & 1+1 \\ 3-2 & -1-3 & 2-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Αναπτύσσουμε ως προς την 1^{η} στήλη:

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $\boldsymbol{9x+y-5z-16=0}$.

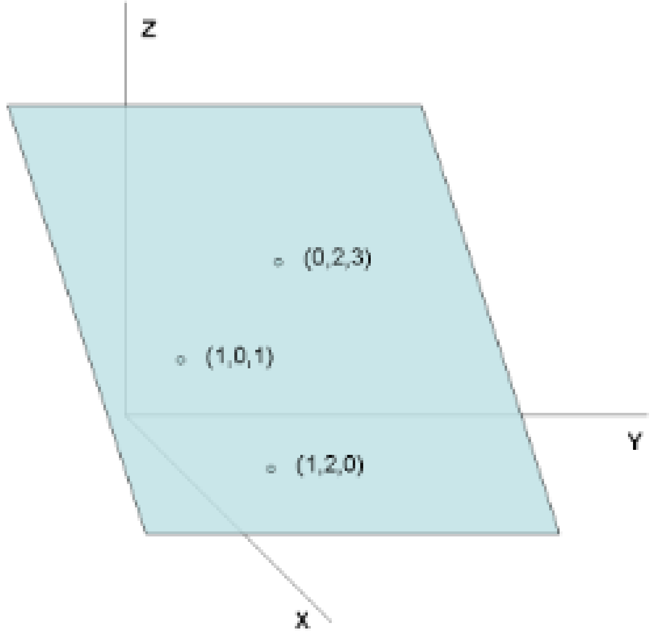
Άσκηση 5

Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου του R^3 που διέρχεται από τα σημεία $(1,2,0), (0,1,3) \kappa\alpha\iota\ (1,0,1)$.

Λύση

Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 0 \\ 0 - 1 & 1 - 2 & 3 - 0 \\ 1 - 1 & 0 - 2 & 1 - 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{5x + y + 2z - 7 = 0}$$

Άσκηση 6

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(1,1,1), (1,-1,1)$ανήκει στο επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου του R^3 που διέρχεται από τα σημεία $(1,1,0), (0,1,1) και\ (1,0,1)$;

Λύση

Η εξίσωση του επιπέδου δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι $\boldsymbol{x+y+z-2=0}$.

Η ευθεία δεν ανήκει στο επίπεδο αφού τα σημεία που την ορίζουν δεν ανήκουν στο επίπεδο (δεν επαληθεύουν την εξίσωση).

Άσκηση 7

Δίνεται το σημείο $P(0,1,2)$ και η ευθεία (ε) με εξισώσεις: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \quad ,t \in R \\ z = 1 - t \end{cases}$

Να βρείτε τις εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο P και (1ο) είναι παράλληλη στην (ε), (2ο) είναι κάθετη στην (ε).

Λύση

(i) Η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (1,2,-1)$, οι συντεταγμένες του είναι οι συντελεστές του t στις εξισώσεις της. Επομένως οι εξισώσεις της παράλληλης ευθείας στην (ε) που διέρχεται από το σημείο P είναι

$$(x,y,z) = (0,1,2) + t \cdot (1,2,-1) \text{ ή } \boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \,, t \in R \\ z = 2 - t \end{cases}}$$

(ii) Αν $Q = (1 + t_0, 2t_0, 1 - t_0)$ είναι το σημείο της αρχικής ευθείας (ε) για το οποίο $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}$, $\vec{u} = (1,2,-1)$, τότε $t = 0$ και συνεπώς η ζητούμενη ευθεία, που διέρχεται από το P και είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{PQ} = (1,2,-1)$ διάνυσμα έχει εξισώσεις

$$\boxed{\begin{cases} x = 0 + \mathbf{1} \cdot t \\ y = 1 + (\mathbf{-1}) \cdot t \,, t \in R \\ z = 2 + (\mathbf{-1}) \cdot t \end{cases}}$$

$$\langle \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}, \vec{\boldsymbol{u}} \rangle = \mathbf{0} \Leftrightarrow \langle (\mathbf{1} + \boldsymbol{t_0} - \mathbf{0}, \mathbf{2}\boldsymbol{t_0} - \mathbf{1}, \mathbf{1} - \boldsymbol{t_0} - \mathbf{2}), (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{1}) \rangle = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{1} + \boldsymbol{t_0} + \mathbf{2} \cdot (\mathbf{2}\boldsymbol{t_0} - \mathbf{1}) + \mathbf{1} + \boldsymbol{t_0} \Leftrightarrow \boldsymbol{t_0} = \mathbf{0}$$

Άσκηση 8

Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon): x-y=0,\ 2x-y+z=0,\quad (\zeta): x+z=0,\ x+y=1$. Να αποδειχθεί ότι ορίζουν ένα επίπεδο και να βρεθεί η εξίσωσή του.

Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας

Λύση Η (ε) και (ζ) γράφονται: $(\varepsilon): x=t,\ y=t,\ z=-t$ $(\zeta): x=m,\ y=1-m,\ z=-m$. Είναι $(\varepsilon)//\boldsymbol{a}=(1,1,-1)$ και $(\zeta)//\mathbf{b}=(1,-1,-1)$. Προφανώς δεν είναι παράλληλες. Εξετάζω αν τέμνονται δηλαδή

Οι συντεταγμένες του είναι οι συντελεστές του *t*

αν υπάρχουν (t,m) ώστε: $t=m,\ t=1-m,\ -t=-m$. Προφανώς $t=m=1/2$. Άρα τέμνονται στο σημείο $P_0(1/2,\ 1/2,\ -1/2)$. Άρα ορίζουν ένα επίπεδο που διέρχεται από το σημείο P_0 και είναι κάθετο στο διάνυσμα

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(-2,\ 0,\ -2)$$

Επομένως το επίπεδο έχει εξίσωση:

$$-2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0y}-\boldsymbol{2z}+\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{0}.$$

Η **καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου** είναι της μορφής $\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{\Gamma z}+\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{0}$ με κάθετο διάνυσμα $\vec{\eta}=(A,B,\Gamma)$.

Αφού $P_0\in(\pi), τότε\quad -2\cdot\frac{1}{2}-2\left(-\frac{1}{2}\right)+\Delta=0\Leftrightarrow \Delta=0$. Άρα $(\boldsymbol{\pi})$: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$.

Υπενθύμιση

- $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

- Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$ είναι **συγγραμμικά**, αν και μόνο αν το εξωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν, δηλ. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- Τρία διανύσματα στο R^3 είναι **συνεπίπεδα** αν και μόνο αν το μικτό τους γινόμενο είναι ίσο με μηδέν, δηλ. $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$.

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

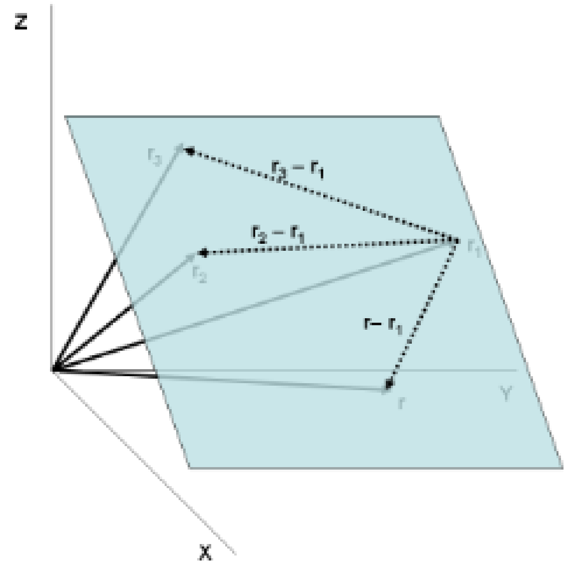
Άσκηση 9

Δικαιολογείστε ότι το επίπεδο που καθορίζεται από τρία σημεία του χώρου $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ ικανοποιεί την διπλανή εξίσωση.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Λύση

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται τα τρία σημεία κι ένα τυχαίο σημείο $M(x, y, z)$ του επιπέδου. Τα M_1, M_2, M_3, M έχουν αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{r}, \vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}$.



Τα διανύσματα

$$\begin{aligned} r - r_1 &= (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \\ r_2 - r_1 &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ r_3 - r_1 &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \end{aligned}$$

Έτσι το σύνολο $\{r - r_1, r_2 - r_1, r_3 - r_1\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο άρα η αντίστοιχη ορίζουσα θα πρέπει να είναι ίση με μηδέν. (βλ. παράγραφο 10)

Άσκηση 10

Βρείτε το σημείο τομής των επιπέδων

$$E_1: x + y + z - 1 = 0$$
$$E_2: x + 2y + z + 1 = 0$$
$$E_3: 3x + y + 4z = 0$$

Λύση

Αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + z + 1 = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Με απαλοιφή Gauss βρίσκουμε ότι το σύστημα έχει λύση την $x = 10, y = -2, z = -7$.

Δηλαδή το σημείο τομής των τριών επιπέδων είναι το $(10, -2, -7)$.

Άσκηση 11

Βρείτε το σημείο τομής των επιπέδων

$$E_1: x + y + z - 1 = 0$$
$$E_2: x + 2y + z + 1 = 0$$
$$E_3: 2x + 3y + 2z = 0$$

Λύση

Αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

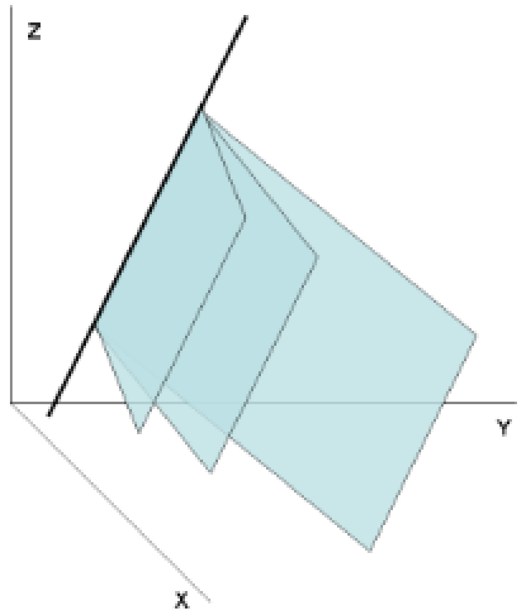
$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Με απαλοιφή Gauss βρίσκουμε ότι το σύστημα

έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$x = 3 - t, y = -2, z = -t, t \in R.$$

Η γεωμετρική ερμηνεία είναι ότι τρία επίπεδα διέρχονται από μία ευθεία!



Άσκηση 12

Βρείτε το σημείο τομής των επιπέδων

$$\begin{aligned} E_1 &: x + y + z - 1 = 0 \\ E_2 &: x + 2y + z + 1 = 0 \\ E_3 &: 2x + 3y + 2z + 3 = 0 \end{aligned}$$

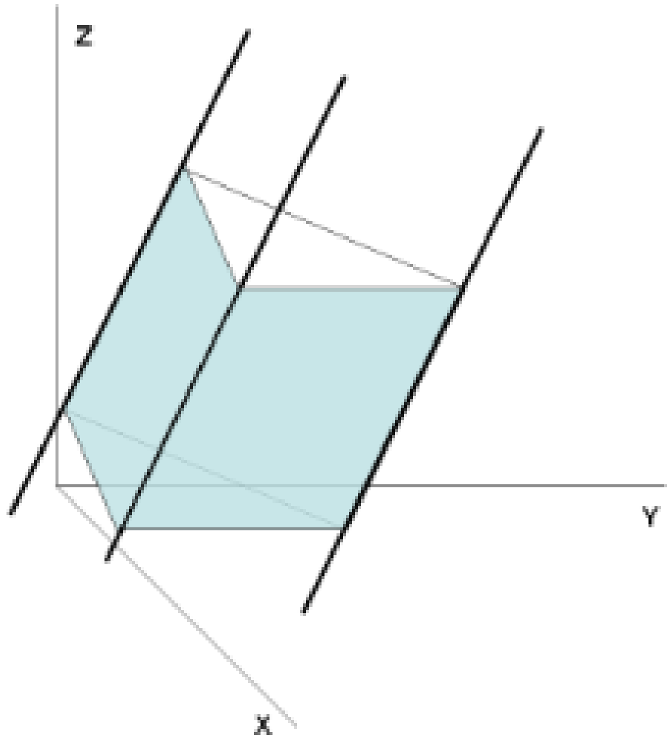
Λύση

Αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} x + y + z - 1 &= 0 \\ x + 2y + z + 1 &= 0 \\ 2x + 3y + 2z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι το σύστημα δεν έχει λύση.

Η γεωμετρική ερμηνεία είναι ότι τα τρία επίπεδα δεν τέμνονται.



Άσκηση 13

Δικαιολογείστε ότι το επίπεδο που καθορίζεται από δυο σημεία του χώρου $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ και είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{p} = (a, b, c)$ ικανοποιεί την διπλανή εξίσωση.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

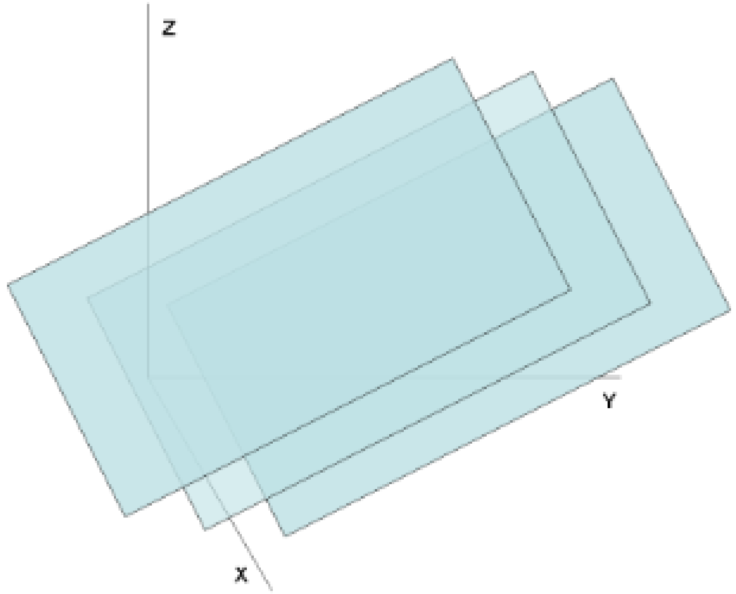
Λύση

Ονομάζουμε $M(x, y, z)$ τυχαίο σημείο του επιπέδου. Σχηματίζουμε τα διανύσματα

$$\vec{r_1} = \overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

$$\vec{r_2} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

τα οποία είναι συνεπίπεδα με το $\vec{p} = (a, b, c)$.



Έτσι το σύνολο είναι γραμμικά εξαρτημένο άρα η αντίστοιχη ορίζουσα θα πρέπει να είναι ίση με μηδέν. (βλ. παράγραφο 10)