ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

17. Ευθεία (συνέχεια) Ευθείες Ασύμβατες-Ευθείες συνεπίπεδες

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

Ευθείες συνεπίπεδες | Ευθείες ασύμβατες

1) Δίνονται οι ευθείες:

$$(\boldsymbol{\varepsilon_1}): \vec{r} = \overrightarrow{r_A} + t \cdot \vec{a}, t \in R, \vec{a} \neq \vec{0}$$

Περνά από το A και είναι παράλληλη στο $\vec{a}$

$$(\boldsymbol{\varepsilon_2}): \vec{r} = \overrightarrow{r_B} + s \cdot \vec{b}, s \in R, \vec{b} \neq \vec{0}$$

Περνά από το B και είναι παράλληλη στο $\vec{b}$

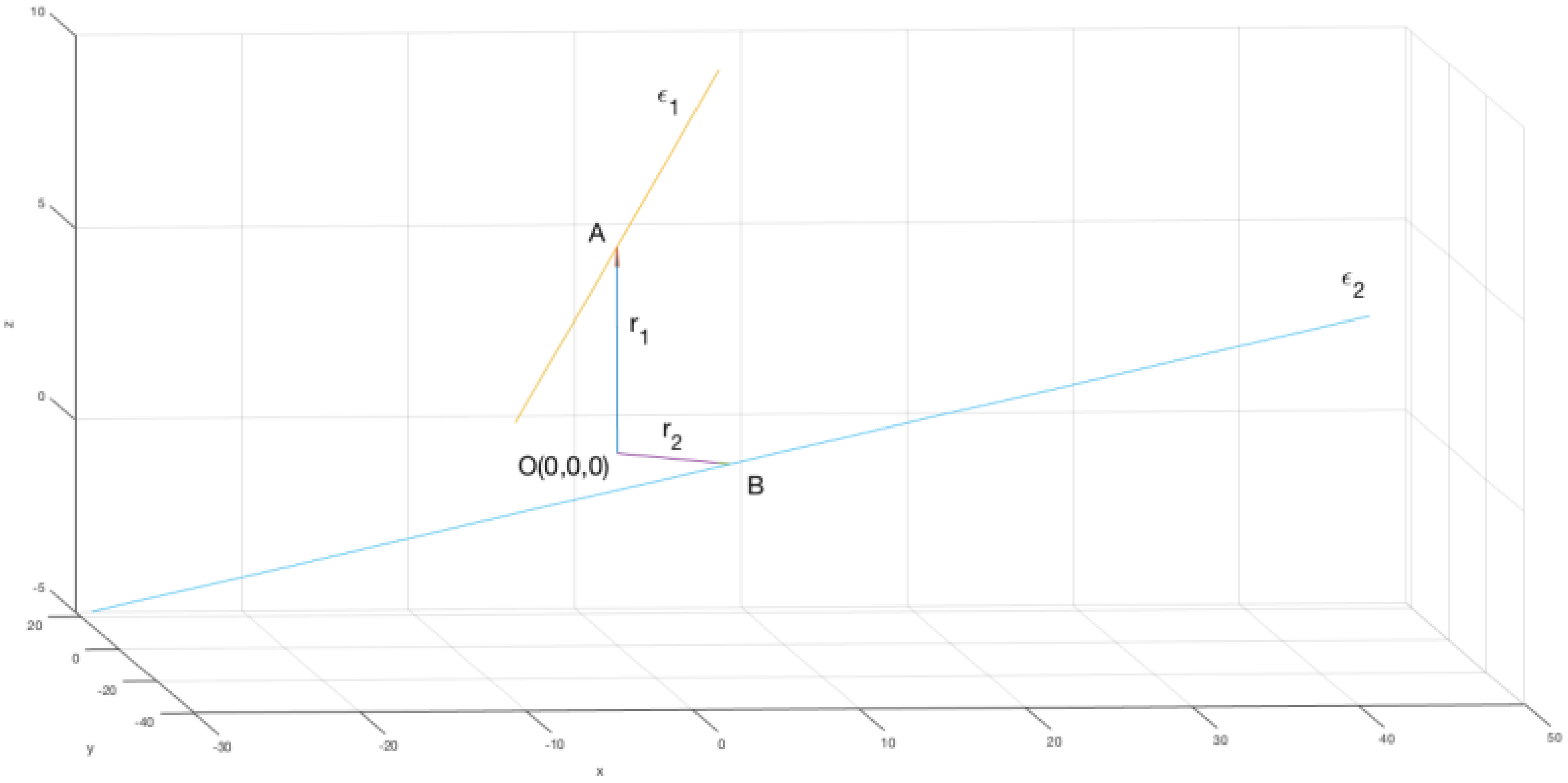
Ισχύει ότι :

i) $(\boldsymbol{\varepsilon_1}), (\boldsymbol{\varepsilon_2})$ $\sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\iota\pi\varepsilon\delta\varepsilon\varsigma \Leftrightarrow [\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}, \vec{a}, \vec{b}] = 0$

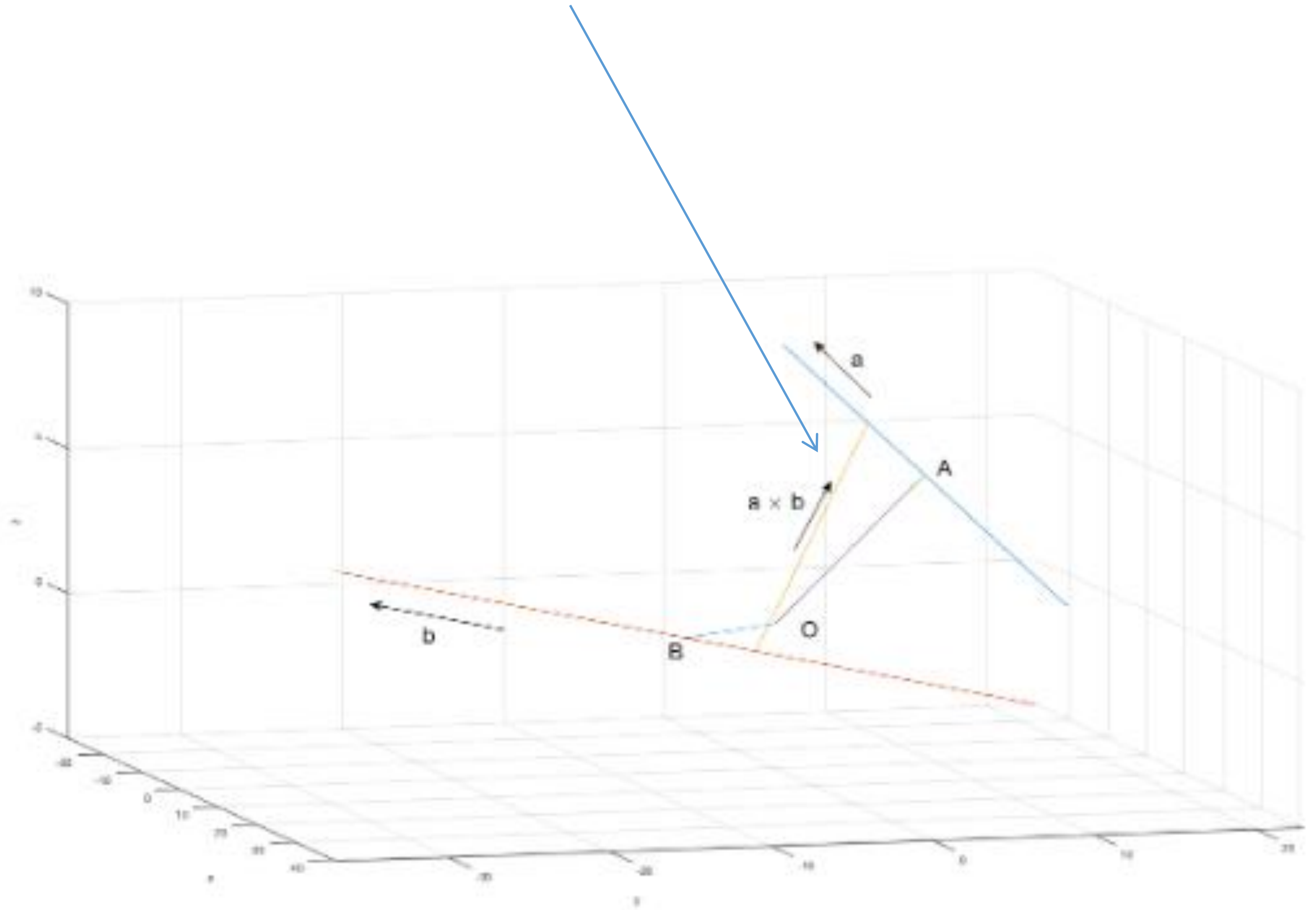
ii) $(\boldsymbol{\varepsilon_1}), (\boldsymbol{\varepsilon_2})$ $\alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\beta\alpha\tau\varepsilon\varsigma \Leftrightarrow [\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}, \vec{a}, \vec{b}] \neq 0$

- **Σημείωση:** Τρία διανύσματα στο R^3 είναι **συνεπίπεδα** αν και μόνο αν το μικτό τους γινόμενο είναι ίσο με μηδέν, δηλ. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \mathbf{0}$.

Ασύμβατες ευθείες



Κοινή κάθετος ασύμβατων ευθειών



Εφαρμογή: Κοινή κάθετη και απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών

Δίνονται οι ευθείες: $(\boldsymbol{\varepsilon_1}): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ **και** $(\boldsymbol{\varepsilon_2}): x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

Α) Να δείξετε ότι είναι ασύμβατες

Β) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής κάθετης και η ελάχιστη απόστασή τους.

Λύση

Α) Θα δείξουμε ότι οι ευθείες δεν είναι παράλληλες και δεν τέμνονται.

Αν ήταν παράλληλες θα υπήρχε $\lambda \in R$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{u_1} = (2,3,1) = \lambda(1,2,3) = \lambda\overrightarrow{u_2}$, όπου $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$είναι αντίστοιχα διανύσματα προς τα οποία είναι παράλληλες οι δύο μας ευθείες. Αυτό όμως είναι αδύνατο!

Επίσης, δεν τέμνονται διότι το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων που περιγράφουν τις δύο ευθείες είναι αδύνατο!

Εφαρμογή (συνέχεια): Κοινή κάθετη και απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών

Β) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής κάθετης και την ελάχιστη απόστασή τους.

$(\boldsymbol{\varepsilon_1}): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ **και** $(\boldsymbol{\varepsilon_2}): x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

Λύση

$(\boldsymbol{\varepsilon_1}) \,//\, \overrightarrow{u_1} = (2,3,1)$ $(\boldsymbol{\varepsilon_2}) \,//\overrightarrow{u_2} = (1,2,3)$

Οι παραμετρικές εξισώσεις της $(\boldsymbol{\varepsilon_1})$ είναι $x = 2t, y = 1 + 3t, z = t, t \in R$ και

της $(\boldsymbol{\varepsilon_2})$ είναι $x = 1 + \lambda, y = 2\lambda, z = 3\lambda, \ \ \lambda \in R$

Άρα ένα τυχαίο σημείο της $(\boldsymbol{\varepsilon_1})$ έχει τη μορφή $\boldsymbol{A(2t, 1+3t, t)}, t \in R$ και της $(\boldsymbol{\varepsilon_2})$: $\boldsymbol{B(1+\lambda, 2\lambda, 3\lambda)}, \lambda \in R$

Η κοινή κάθετη θα προκύψει από την απαίτηση **το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ να είναι κάθετο και στις δύο ευθείες**. Δηλαδή:

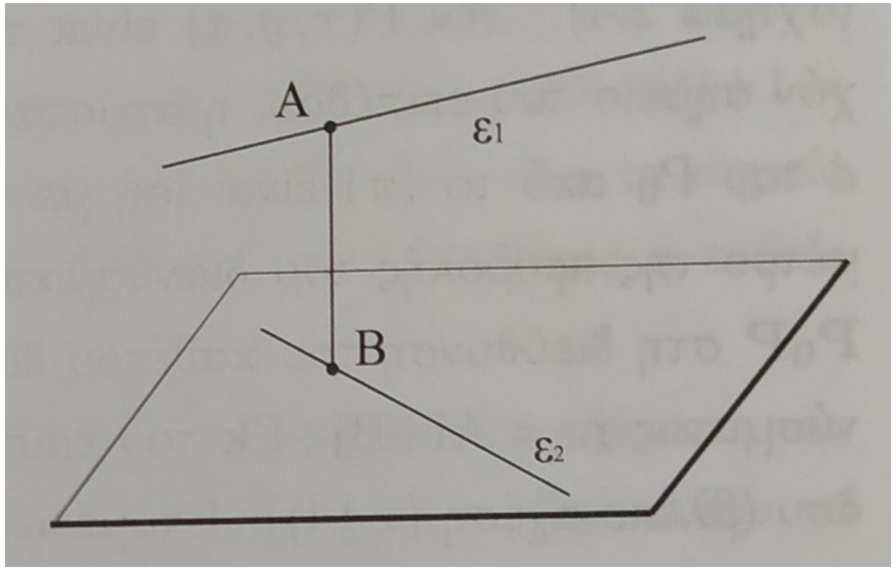
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0 \text{ και } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$$

Επειδή $\overrightarrow{AB} = (1 + \lambda - 2t)\vec{i} + (2\lambda - 3t - 1)\vec{j} + (3\lambda - t)\vec{k}$

Επειδή $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$

Οι προηγούμενες σχέσεις ισοδυναμούν με το σύστημα:

$$\begin{cases} -1 + 11\lambda - 14t = 0 \\ -1 + 14\lambda - 11t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1/25 \\ \lambda = 1/25 \end{cases}$$

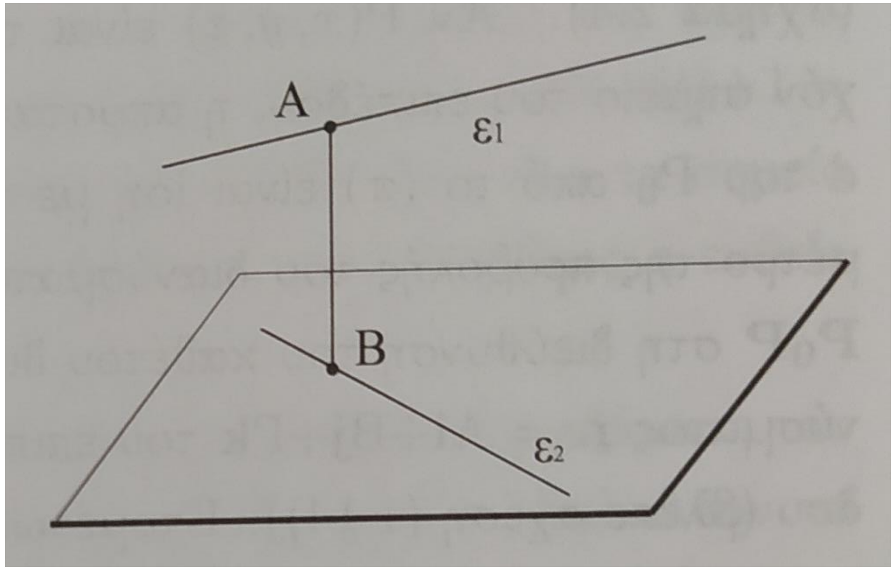


Εφαρμογή (συνέχεια): Κοινή κάθετη και απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών

Β) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής κάθετης και την ελάχιστη απόστασή τους.

$$(\boldsymbol{\varepsilon_1}): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z \text{ και } (\boldsymbol{\varepsilon_2}): x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

Λύση



Άρα τα σημεία από όπου περνάει η κοινή τους κάθετη είναι τα $\boldsymbol{A}\left(-\frac{2}{25}, \frac{22}{25}, -\mathbf{1/25}\right)$ και της $(\boldsymbol{\varepsilon_2})$: $\boldsymbol{B}(\mathbf{26/25, 2/25, 3/25})$

Η κοινή κάθετη ευθεία $(\boldsymbol{\delta})$ διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στο

$\overrightarrow{AB} = \frac{4}{25}(7\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k})$. Άρα και στο $\vec{u} = (7\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k})$.

Επομένως η εξίσωση της κοινής καθέτου είναι

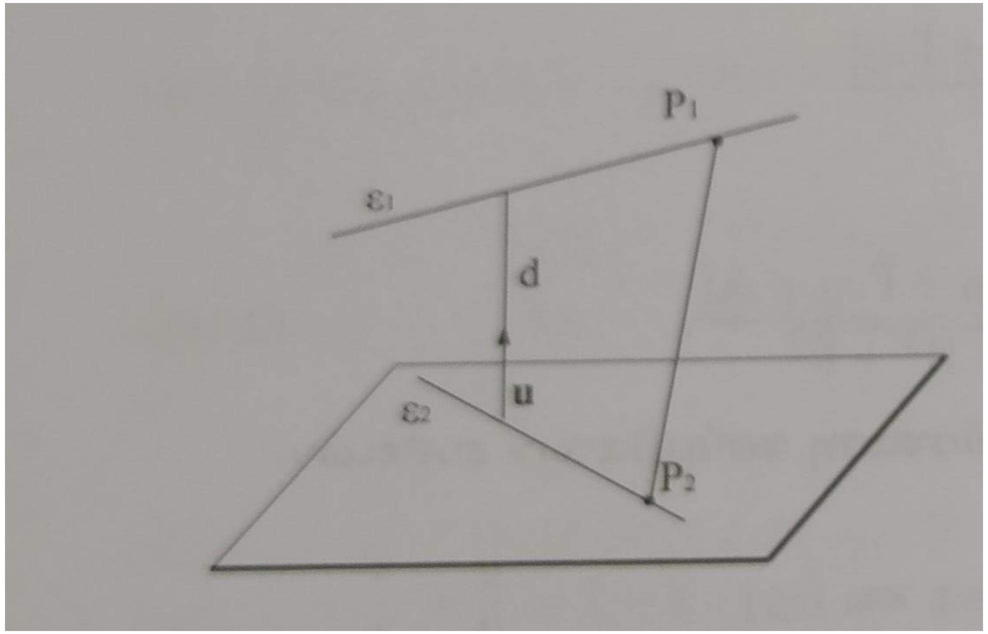
$$(\boldsymbol{\delta}): \frac{\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{25}}}{\mathbf{7}} = \frac{\boldsymbol{y} - \frac{\mathbf{22}}{\mathbf{25}}}{-\mathbf{5}} = \frac{\boldsymbol{z} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}}{\mathbf{1}}$$

Εφαρμογή (συνέχεια): Κοινή κάθετη και απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών

Β) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής κάθετης και την ελάχιστη απόστασή τους.

$(\boldsymbol{\varepsilon_1}): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ **και** $(\boldsymbol{\varepsilon_2}): x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

Λύση



Η ελάχιστη απόστασή τους είναι

$$\boldsymbol{d = \|AB\| = \frac{\sqrt{1200}}{25} = \frac{4\sqrt{3}}{5}}.$$

Υπενθύμιση: Έστω $A = (x_A, y_A, z_A), B = (x_B, y_B, z_B)$ δύο στοιχεία του $\boldsymbol{R^3}$ με αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Τότε, απόσταση των σημείων A και B (συμβολικά $d(A, B)$) ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό $d(A, B)$ ο οποίος

$$d(A, B)^2 = \left\|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right\|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

Εφαρμογή (συνέχεια): Κοινή κάθετη και απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών

$(\boldsymbol{\varepsilon_1}): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ **και** $(\boldsymbol{\varepsilon_2}): x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

$(\boldsymbol{\varepsilon_1}) \,//\, \overrightarrow{u_1} = (2,3,1)$

$(\boldsymbol{\varepsilon_2}) \,//\, \overrightarrow{u_2} = (1,2,3)$

Β) Η ελάχιστη απόσταση $\boldsymbol{d}$ των δύο ευθειών $(\boldsymbol{\varepsilon_1})$ και $(\boldsymbol{\varepsilon_2})$ μπορεί να βρεθεί και διαφορετικά:
η $\boldsymbol{d}$ είναι ίση με το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{\boldsymbol{P_1 P_2}}$, όπου $\boldsymbol{P_1}$ και $\boldsymbol{P_2}$ δύο σημεία των ευθειών $(\boldsymbol{\varepsilon_1})$ και $(\boldsymbol{\varepsilon_2})$ αντίστοιχα, επάνω στο διάνυσμα που είναι κάθετο προς τις ευθείες $(\boldsymbol{\varepsilon_1})$ και $(\boldsymbol{\varepsilon_2})$.
Ένα διάνυσμα κάθετο προς τις ευθείες είναι το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}$, όπου τα $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$, είναι παράλληλα προς τις ευθείες $(\boldsymbol{\varepsilon_1})$ και $(\boldsymbol{\varepsilon_2})$ αντίστοιχα.

Αφού $\overrightarrow{u_1} = (2,3,1)$ και $\overrightarrow{u_2} = (1,2,3)$, τότε $\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2} = (7,-5,1)$.
Τα σημεία $\boldsymbol{P_1} = (0,1,0)$και $\boldsymbol{P_2} = (1,0,0)$ ανήκουν στις ευθείες $(\boldsymbol{\varepsilon_1})$ και $(\boldsymbol{\varepsilon_2})$ αντίστοιχα. Άρα:

$\overrightarrow{\boldsymbol{P_1 P_2}} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 0\vec{k}$ και

$$\boldsymbol{d} = \frac{\|\langle \vec{u}, \overrightarrow{\boldsymbol{P_1 P_2}} \rangle\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\mathbf{4\sqrt{3}}}{\mathbf{5}}.$$

Απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών

Δίνονται οι ευθείες:

$$(\boldsymbol{\varepsilon_1}):\ \vec{r} = \overrightarrow{r_A} + t \cdot \vec{a}, t \in R, \vec{a} \neq \vec{0}$$

$$(\boldsymbol{\varepsilon_2}):\ \vec{r} = \overrightarrow{r_B} + s \cdot \vec{b}, s \in R, \vec{b} \neq \vec{0}$$

Ισχύει ότι :

$$(\boldsymbol{\varepsilon_1}), (\boldsymbol{\varepsilon_2})\ \alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\beta\alpha\tau\varepsilon\varsigma \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}, \vec{a}, \vec{b}\right] \neq 0$$

Αν οι ευθείες $(\boldsymbol{\varepsilon_1}), (\boldsymbol{\varepsilon_2})$ είναι ασύμβατες, δηλαδή $\left[\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}, \vec{a}, \vec{b}\right] \neq 0$, τότε η απόστασή τους, δηλαδή το μήκος του κοινού κάθετου ευθυγράμμου τμήματος είναι ίσο με

$$\boldsymbol{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{\boldsymbol{r_A}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_B}}, \vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}\right]\right|}{\left\|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right\|} = \frac{\left|\left\langle \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}, \overrightarrow{\boldsymbol{r_A}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_B}} \right\rangle\right|}{\left\|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right\|}$$

- **Υπενθύμιση**: Για κάθε $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ορίζουμε **μικτό γινόμενο**
- $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \in R$

Εφαρμογή: Απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών

Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2) που ορίζονται από τα σημεία $\vec{r_A} = (2, 6, -9)$ και $\vec{r_B} = (-1, -2, 3)$ και τα διανύσματα κατεύθυνσης $\vec{a} = (3, 4, -3)$ και $\vec{b} = (2, -6, 1)$, αντιστοίχως. Να βρεθεί η απόσταση των δύο ευθειών.

Προφανώς, οι δύο ευθείες δεν είναι παράλληλες ($\vec{a} \neq \lambda \vec{b}$) και δεν τέμνονται.
Η κοινή κάθετος των δύο ασύμβατων ευθειών έχει τη διεύθυνση

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-20, -11, -26).$$

Στην περίπτωση αυτή, $\vec{r_A} - \vec{r_B} = (3, 8, -12)$

$$d(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\left|\left[\vec{r_A} - \vec{r_B}, \vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|} = \frac{|\langle(-20, -11, -26), (3, 8, -12)\rangle|}{3\sqrt{133}} = 4.74.$$

- **Υπενθύμιση** : συμβολικής «ορίζουσας»:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Αυτή η έκφραση είναι ως προς μία δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

Απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών-εφαρμογή

Δίνονται οι ευθείες:

$$(\epsilon_1) : x - 1 = \frac{y-9}{-2} = z - 5$$

$$(\epsilon_2) : \frac{x-6}{7} = \frac{y+7}{-6} = z.$$

i. Να δειχθεί ότι οι ευθείες είναι ασύμβατες (δεν είναι παράλληλες και δεν τέμνονται).
ii. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση.
iii. Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής κάθετης.

Απόδειξη:

i. Για τις δεδομένες ευθείες, έχουμε $\vec{a} = (1, -2, 1)$, $\vec{b} = (7, -6, 1)$ και

$$\left.\begin{aligned} \vec{r_1} &= (1,9,5) \\ \vec{r_2} &= (6,-7,0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{r_1} - \vec{r_2} = (-5, 16, 5).$$

$$(\epsilon_1), (\epsilon_2) \quad \text{ασύμβατες} \quad \Leftrightarrow \left[\vec{r_1} - \vec{r_2}, \vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} -5 & 16 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 116 \neq 0.$$

Απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών-εφαρμογή (συνέχεια)

ii.-iii. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση και η εξίσωση της κοινής κάθετης.

$(\epsilon_1): x-1=\frac{y-9}{-2}=z-5$

$(\epsilon_2): \frac{x-6}{7}=\frac{y+7}{-6}=z.$

Απόδειξη:

ii.-iii. Τα τυχαία σημεία $A \in (\epsilon_1)$, $B \in (\epsilon_2)$ ικανοποιούν:

$$A=(1+t, 9-2t, 5+t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{και} \quad B=(6+7s, -7-6s, s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Τότε $\overrightarrow{AB}=(5-t+7s, -16+2t-6s, -5-t+s)$ και $\overrightarrow{AB} \perp (\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{AB}, \vec{a} \rangle = 0, \\ \langle \overrightarrow{AB}, \vec{b} \rangle = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-10s-16=0, \\ 10t-43s-63=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2, \\ s=-1. \end{cases}$$

Σημ: $\langle \vec{\alpha}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{b}$

Άρα τα ίχνη της κοινής κάθετης είναι $A(3,5,7)$ και $B(-1,-1,-1)$.

Σημ: $(5-t+7s)\cdot 1+(-16+2t-6s)\cdot(-2)+(-5-t+s)\cdot 1 = 5-t+7s+32 \dots .$

Απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών-εφαρμογή (συνέχεια)

(iii) Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής κάθετης

$$(\epsilon_1): x-1=\frac{y-9}{-2}=z-5$$
$$(\epsilon_2): \frac{x-6}{7}=\frac{y+7}{-6}=z.$$

Λύση

Τα ίχνη της κοινής κάθετης είναι $A(3,5,7), B(-1,-1,-1)$, άρα

$$d(\epsilon_1,\epsilon_2)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-1-3)^2+(-1-5)^2+(-1-7)^2}=2\sqrt{29}.$$

και η εξίσωση της ευθείας του κοινού καθέτου τήματος βρίσκεται από την

$$(\vec{r}-\vec{r_A})\times\vec{u}=\vec{0},$$

όπου $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-4,-6,-8)$ και $\vec{r_A}=(3,5,7)$. Συνεπώς,

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{6}=\frac{z-7}{8}.$$

Περνά από το A και είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ (συγγραμμικά άρα εξ.γιν. μηδέν)

Έστω $A=(x_A,y_A,z_A), B=(x_B,y_B,z_B)$ δύο στοιχεία του $\boldsymbol{R^3}$ με αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. Τότε, απόσταση των σημείων A και B (συμβολικά $d(A,B)$) ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό $d(A,B)$ ο οποίος

$$d(A,B)^2=\left\|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right\|^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2$$

Απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών-Αναλυτική μορφή

Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2) από τις σχέσεις:

$$\frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\beta_1} = \frac{z - z_1}{\gamma_1},$$
$$\frac{x - x_2}{\alpha_2} = \frac{y - y_2}{\beta_2} = \frac{z - z_2}{\gamma_2}.$$

Η ελάχιστη απόστασή τους δίνεται από τον τύπο:

$$d(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\left[(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)^2 + (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \beta_2\alpha_1)^2\right]^{1/2}}.$$

Απόσταση δύο παράλληλων ευθειών

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες:

$$(\epsilon_1) : \vec{r} = \vec{r_1} + t\,\vec{a}, t \in \mathbb{R}$$

$$(\epsilon_2) : \vec{r} = \vec{r_2} + s\,\vec{a}, s \in \mathbb{R}.$$

Η απόστασή τους $d(\epsilon_1, \epsilon_2)$ δίνεται από τη σχέση

$$d(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\|(\vec{r_1} - \vec{r_2}) \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}.$$

Απόσταση σημείου από ευθεία του χώρου

Δίνεται η ευθεία:

$$(\epsilon):\vec{r} = \vec{r_1} + t\,\vec{a}, t \in \mathbb{R}$$

και το σημείο P_0 με $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r_0}$. Η απόσταση $d(P_0, \epsilon)$ του σημείου από την ευθεία δίνεται από τη σχέση

$$d(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\|(\vec{r_0} - \vec{r_1}) \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}.$$