ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

15. Εσωτερικό γινόμενο-Νόρμα-Προβολή

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων-ορισμός

- Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{b}$ (συμβολικά $\langle\vec{\alpha}, \vec{b}\rangle$ ή $\vec{a} \cdot \vec{b}$) τον πραγματικό αριθμό

$$\langle\vec{\alpha}, \vec{b}\rangle = \|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot cos\varphi = \|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot cos\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{b}}\right)$$

Παρατηρήσεις

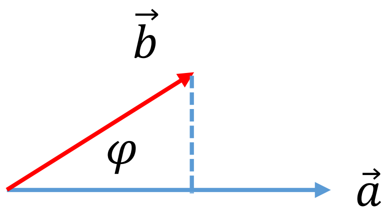
- $cos\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{b}}\right) = \frac{\langle\vec{\alpha}, \vec{b}\rangle}{\|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{b}\|}$

- $\langle\vec{\alpha}, \vec{b}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{b}$

Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων στο R^2 (scalar product)

- **Γεωμετρική ερμηνεία**

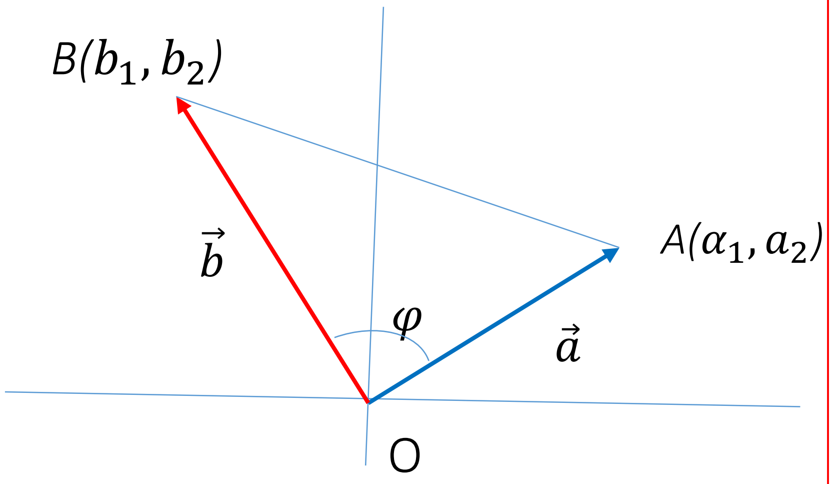
  - $\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{\alpha}, \vec{b} \rangle =$
  - $\|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot cos\varphi =$
  - $\|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot cos\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{b}}\right)$



- **Αναλυτική έκφραση**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{\alpha}, \vec{b} \rangle = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$$

  - $\vec{a} = \alpha_1 \vec{\imath} + \alpha_2 \vec{\jmath}$
  - $\vec{b} = b_1 \vec{\imath} + b_2 \vec{\jmath}$



- **Μορφή πινάκων**

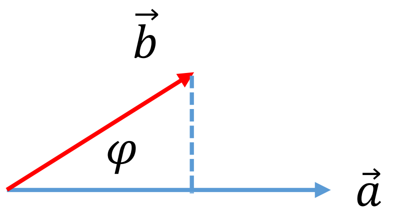
  - $\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{\alpha}, \vec{b} \rangle =$
  - $\vec{a}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{b} =$
  - $[\alpha_1 \quad \alpha_2] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} =$
  - $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$

  - $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$
  - $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων στο R^3 (scalar product)

- **Γεωμετρική ερμηνεία**

  - $\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{\alpha}, \vec{b} \rangle =$
  - $\|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot cos\varphi =$
  - $\|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot cos\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{b}}\right)$



- **Αναλυτική έκφραση**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{\alpha}, \vec{b} \rangle = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$$

  - $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\delta\eta\lambda.\, \vec{a} = \alpha_1 \vec{\imath} + \alpha_2 \vec{\jmath} + \alpha_3 \vec{k}$
  - $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\delta\eta\lambda.\, \vec{b} = b_1 \vec{\imath} + b_2 \vec{\jmath} + b_3 \vec{k}$

- **Μορφή πινάκων**

  - $\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{\alpha}, \vec{b} \rangle =$
  - $\vec{a}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{b} =$
  - $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} =$
  - $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$

  - $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

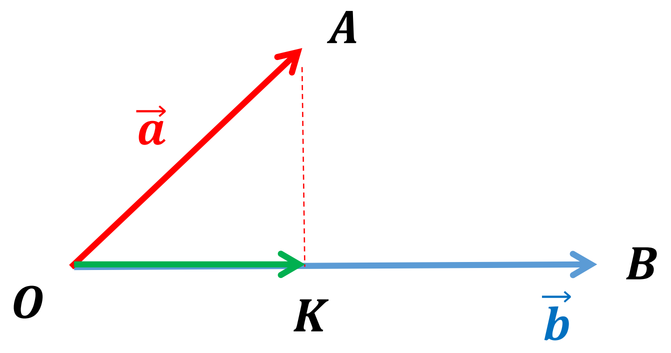
Μέτρο ή Νόρμα διανύσματος

Ονομάζουμε μέτρο ή νόρμα ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ του R^3 (συμβολικά $\|\vec{\alpha}\|$) τον πραγματικό αριθμό

$$\|\vec{\alpha}\|^2 = \langle \vec{\alpha}, \vec{a} \rangle$$

Προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{b}$

Η **προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{b}$** του R^3, ορίζεται ως το διάνυσμα $\boldsymbol{pr_{\vec{b}}\vec{a}} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \vec{\boldsymbol{b}}$



Απόσταση μεταξύ δύο σημείων του R^3

Έστω $A = (x_A, y_A, z_A), B = (x_B, y_B, z_B)$ δύο στοιχεία του $\boldsymbol{R^3}$ με αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Τότε, απόσταση των σημείων A και B (συμβολικά $d(A, B)$) ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό $d(A, B)$ ο οποίος

$$d(A,B)^2 = \left\|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right\|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$