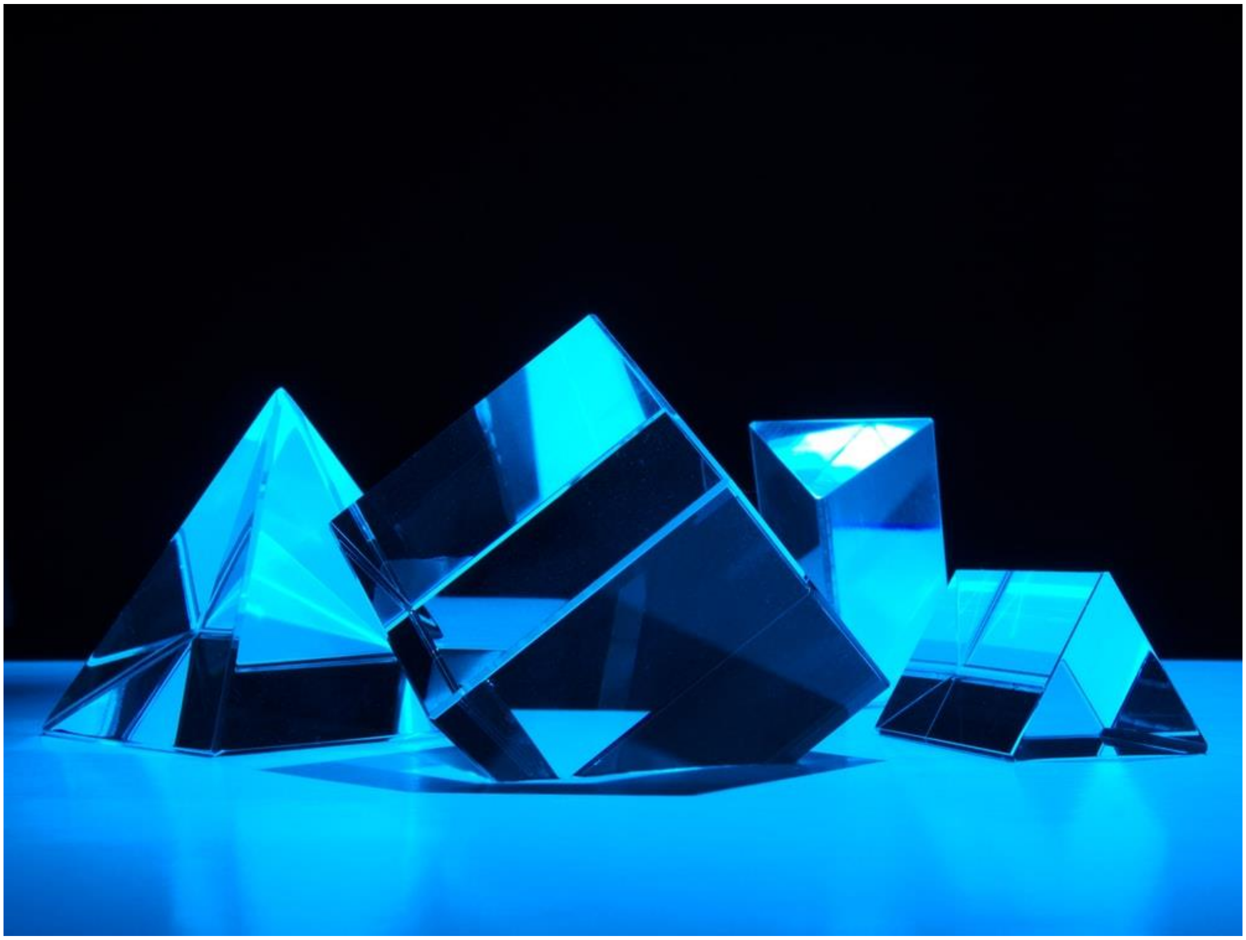

11. Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Κάλλια Παυλοπούλου| Γραμμική Άλγεβρα | 2020

ΆΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}4 & -5 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

I) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα A καθώς και η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής.

II) Να βρείτε τους ιδιόχωρους που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του ερωτήματος I , καθώς και τη γεωμετρική πολλαπλότητα που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΆΣΚΗΣΗΣ 1Α

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$x_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -5 & 1\\ 2 & -3-\lambda & 1\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & -5\\ 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=-(\lambda+1)[(4-\lambda)(-3-\lambda)+10]=(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-2)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

Άρα $\boxed{\boldsymbol{x_A(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)}}$

Οι λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι $\boxed{\boldsymbol{\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2}}$.

Άρα οι ιδιοτιμές του Α είναι -1 με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και 2 με αλγεβρική πολλαπλότητα 1.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΆΣΚΗΣΗΣ 1Β

I) Για την ιδιοτιμή -1 θα λύσουμε το σύστημα:

$$[A-(-1)I_3]\cdot\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4+1 & -5 & 1\\ 2 & -3+1 & 1\\ 0 & 0 & -1+1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}5 & -5 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Επαυξημένος σε ανηγμένο κλιμακωτό:

$$\begin{bmatrix}5 & -5 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1/5 & 0\\ 1 & -1 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1/5 & 0\\ 0 & 0 & 3/10 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1/5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ x_2\in R\\ x_3=0\end{cases}$$. Άρα, το σύνολο λύσεων τα $\boxed{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ x_2\\ 0\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},x_2\in R}$

$\boldsymbol{rankA=2}$

Άρα ο ιδιόχωρος

Με το σύμβολο $\langle\vec{x}\rangle$ ορίζουμε το δ.χ. που παράγεται από το διάνυσμα $\vec{x}$.

$$\boldsymbol{V_{-1}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R^3} : \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\kappa} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\kappa} \in \boldsymbol{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\rangle$$

Η διάσταση του χώρου $V_{-1}(A)$ είναι ίση με 1, δηλαδή $\dim V_{-1}(A) = 1$. (Σημείωση: η διάσταση του χώρου των λύσεων του συστήματος $Ax = 0$ είναι ίση με $n - rankA$.)

Επομένως η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής -1 είναι 1. Ενώ η αλγεβρική πολλαπλότητα της της ιδιοτιμής -1 είναι ίση με 2. (βλ. ως ρίζα του χαρ.πολ.)

ΙΙ) Για την ιδιοτιμή 2 θα λύσουμε το σύστημα:

$$[A - 2I_3] \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-2 & -5 & 1 \\ 2 & -3-2 & 1 \\ 0 & 0 & -1-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επαυξημένος σε ανηγμένο κλιμακωτό:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} x_2 \\ x_2 \in R \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{rankA = 2}$

Άρα, το σύνολο λύσεων τα $\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 \in R}$.

Με το σύμβολο $\langle\vec{x}\rangle$ ορίζουμε το δ.χ. που παράγεται από το διάνυσμα $\vec{x}$.

Άρα ο ιδιόχωρος

$$\boldsymbol{V_2(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R^3} : \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\kappa} \begin{bmatrix} \mathbf{5/2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\kappa} \in \boldsymbol{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{5/2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\rangle$$

Η διάσταση του χώρου $V_2(A)$ είναι ίση με 1, δηλαδή $\boldsymbol{\dim V_2(A) = 1}$.

Επομένως η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 2 είναι 1 και είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα της της ιδιοτιμής 2 η οποία είναι ίση με 1. (βλ. ως ρίζα του χαρ.πολ.)

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΆΣΚΗΣΗΣ 2

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$x_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8)$$

Άρα $\boxed{\boldsymbol{x_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8)}}$

Οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\boxed{\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 8.}}$

Άρα οι ιδιοτιμές του Α είναι 2 με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και 8 με αλγεβρική πολλαπλότητα 1.

Ι) Για την ιδιοτιμή 2 , για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα, θα λύσουμε το σύστημα:

$$[A - 2I_3] \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-2 & 2 & 2 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 2 & 2 & 4-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επαυξημένος σε ανηγμένο κλιμακωτό:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \ldots \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{rankA = 1}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_2 \in R \\ x_3 \in R \end{cases}$$

Άρα, το σύνολο λύσεων τα $\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2, x_3 \in R .}$

Άρα ο ιδιόχωρος

$$\boldsymbol{V_2(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in R^3 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in R \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}$$

Η διάσταση του χώρου $V_2(A)$ είναι ίση με 2, δηλαδή $\mathbf{dim}\, \boldsymbol{V_2(A)} = \mathbf{2}$. (Σημείωση: η διάσταση του χώρου των λύσεων του συστήματος $Ax = 0$ είναι ίση με $n - rankA$.)

Επομένως η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 2 είναι 2 ίση με την αλγεβρική της πολλαπλότητα (βλ. ως ρίζα του χαρ.πολ.).

ΙΙ) Για την ιδιοτιμή 8 , για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα, θα λύσουμε το σύστημα:

$$[A - 8I_3] \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-8 & 2 & 2 \\ 2 & 4-8 & 2 \\ 2 & 2 & 4-8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επαυξημένος σε ανηγμένο κλιμακωτό:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \in R \end{cases}$$

$\boldsymbol{rankA = 2}$

Άρα, το σύνολο λύσεων τα $\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 \in R \,.}$

Άρα ο ιδιόχωρος

$$\boldsymbol{V_8(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R^3}: \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\kappa} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\kappa} \in \boldsymbol{R} \right\} = \langle \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \rangle$$

Η διάσταση του χώρου $V_8(A)$ είναι ίση με 1, δηλαδή $\mathbf{dim}\, \boldsymbol{V_8(A)} = \mathbf{1}$. (Σημείωση: η διάσταση του χώρου των λύσεων του συστήματος $Ax = 0$ είναι ίση με $n - rankA$.)

Επομένως η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 8 είναι 1 ίση με την αλγεβρική της πολλαπλότητα (βλ. ως ρίζα του χαρ.πολ.).

Στην άσκηση αυτή παρατηρούμε πως και για τις δύο ιδιοτιμές ισχύει ότι αλγεβρική πολλαπλότητα ταυτίζεται με την γεωμετρική. Δηλαδή το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A ταυτίζεται με τη διάσταση του πίνακα A.