

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF
ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND
PHYSICAL SCIENCES

Επίλυση ενός συστήματος 2×2

Κάλλια Παυλοπούλου
2020-2021

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων 2×2 , δυο εξισώσεις και δυο αγνώστους

Αλγεβρική επίλυση

2

Παράδειγμα 1:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$$

Ως προς τις γραμμές

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$$

Επίλυση με εξισώσεις

Επίλυση με τη βοήθεια πινάκων

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος 2×2

Λύση συμβολικά με εξισώσεις

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 & \varepsilon\xi 1 \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \varepsilon\xi 1 \\ 5x + 2y = -10 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -2 & \varepsilon\xi 2 \rightarrow \varepsilon\xi 2 - 5\varepsilon\xi 1 \\ 5x + 2y = -10 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -2 & \varepsilon\xi 2 \rightarrow \left(\frac{1}{7}\right) \varepsilon\xi 2 \\ 7y = 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -2 & \varepsilon\xi 1 \rightarrow \varepsilon\xi 1 + \varepsilon\xi 2 \\ y = 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την $x = -2, y = 0$

Λύση με χρήση πινάκων

$$[A|b] = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 5\gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{7}\gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [A_R|b_R]$$

Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων 2×2 , με μία και μοναδική λύση

4

Γεωμετρική Ερμηνεία

Παράδειγμα 1:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$$

Ως προς τις γραμμές

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$$

Ως προς τις στήλες

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases} \quad x \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1:

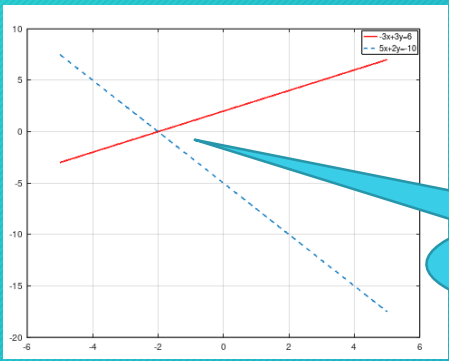
Σύστημα γραμμικών εξισώσεων 2×2 ,
με μία και μοναδική λύση

5

Γεωμετρική Ερμηνεία

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$$

Ως προς τις γραμμές



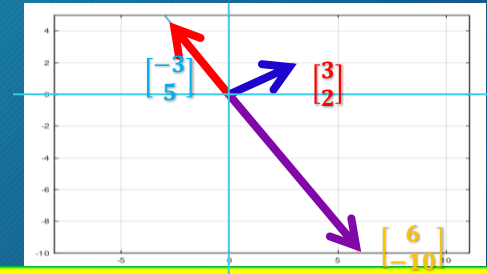
το σημείο τομής των δύο ευθειών $(-2, 0)$

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$$

Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την $x = -2, y = 0$

Ως προς τις στήλες

$$x \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$



Δυο διανύσματα στον χώρο R^2

... ένας μοναδικός γραμμικός συνδυασμός τους μπορεί να δημιουργήσει το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}$

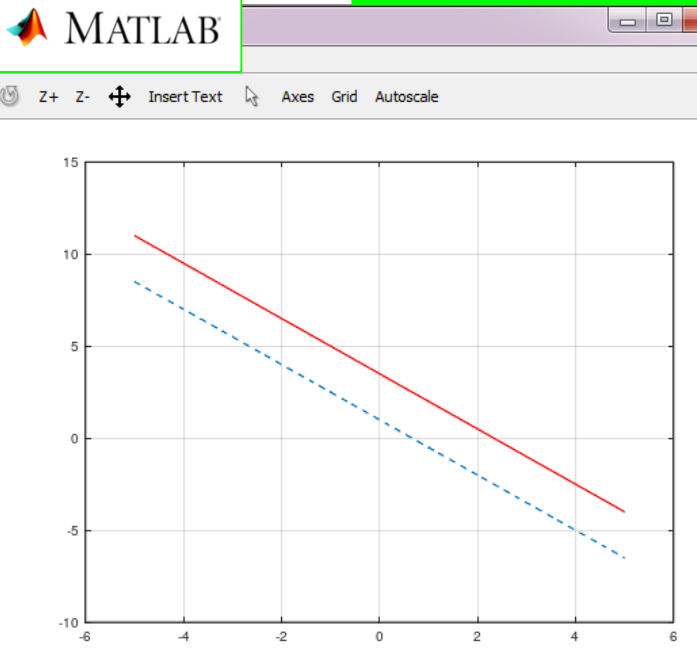
... Αυτός ο μοναδικός γραμμικός συνδυασμός προκύπτει για $x = -2, y = 0$

Δυνατές περιπτώσεις γραμμικού συστήματος 2×2

```
>> x=[-5:0.2:5];
>> y=-1.5*x+3.5;
>> z=-1.5*x+1;
>> plot(x,y,'r',x,z,'--')
>> grid
```

Παράδειγμα 2

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

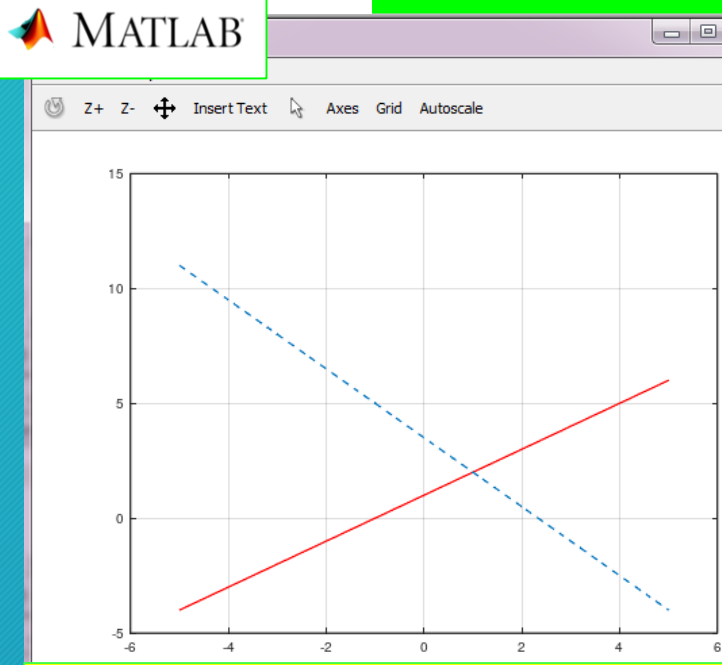


Το σύστημα δεν έχει λύση

```
>> x=[-5:0.2:5];
>> y=x+1;
>> z=-1.5*x+3.5;
>> plot(x,y,'r',x,z,'--')
>> grid
```

Παράδειγμα 3

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

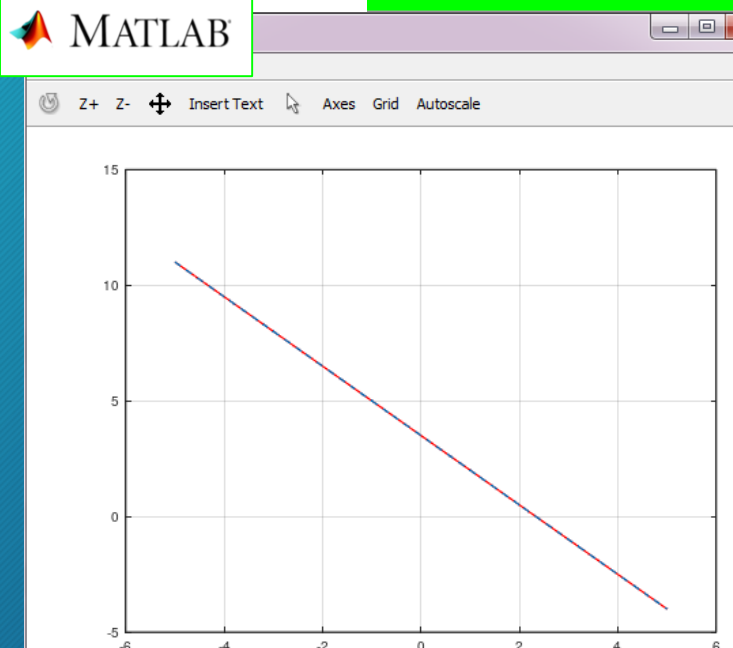


Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την $x = 1, y = -2$

```
>> x=[-5:0.2:5];
>> y=-1.5*x+3.5;
>> z=(-6/4)*x+14/4;
>> plot(x,y,'r',x,z,'--')
>> grid
```

Παράδειγμα 4

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 4y = 14 \end{cases}$$



Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις