ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα

5. Επίλυση Γραμμικού Συστήματος

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}, A \in M_{\mu \times \nu}$$

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων και ν αγνώστων:

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\nu}x_\nu = b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2\nu}x_\nu = b_2} \\ \dots\dots\dots \\ \boldsymbol{a_{\mu1}x_1 + a_{\mu2}x_2 + \cdots + a_{\mu\nu}x_\nu = b_\mu} \end{cases}}$$

Αν ονομάσουμε:

- $\boldsymbol{A = [a_{ij}]}$ τον $\mu \times \nu$ πίνακας των συντελεστών του συστήματος και
- $\boldsymbol{\vec{b} = [b_i]}$ την $\mu \times 1$ στήλη των σταθερών όρων $[b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{\mu-1} \quad b_\mu]^T$
- $\boldsymbol{\vec{x} = [x_i]}$ την $\nu \times 1$ στήλη των άγνωστων όρων $[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{\nu-1} \quad x_\nu]^T$

το παραπάνω σύστημα γράφεται ως εξής: $\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$

Και καθορίζεται πλήρως από τον $\mu \times (\nu + 1)$ επαυξημένο πίνακα $[A|b]$

δηλαδή έχει το ίδιο σύνολο λύσεων

Το παραπάνω σύστημα είναι <u>ισοδύναμο</u>

με το γραμμικό σύστημα που έχει επαυξημένο πίνακα τον $[A_R|b_R]$ ο οποίος είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του $[A|b]$.

Έτσι, μπορούμε να αναχθούμε σε ένα απλούστερο σύστημα το οποίο λύνεται εύκολα!

$$\boxed{\boldsymbol{A_R} \cdot \vec{x} = \overrightarrow{\boldsymbol{b_R}}}$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 1 : Θα ξεκινήσουμε μελετώντας το πρώτο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου*, αλλά με τους σταθερούς όρους μη μηδενικούς.

$$\begin{cases} -3x + 3y = \boxed{6} \\ 5x + 2y = \boxed{-10} \end{cases}$$

Σταθεροί όροι μη μηδενικοί

***Σημείωση:** Στην προηγούμενη παράγραφο είχαμε δουλέψει με το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$

Παράδειγμα 1: μη ομογενές σύστημα 2×2

$$\begin{cases} -3x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$$

σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} -3x + 3y \\ 5x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Το γραμμικό μας σύστημα καθορίζεται πλήρως, από τον επαυξημένο πίνακα:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc:c} -3 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{matrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{matrix} 6 \\ -10 \end{matrix}}_{\vec{b}}$$

Τον οποίο θα ανάγουμε
σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

Αναγωγή του επαυξημένου σε ανηγμένο κλιμακωτό

$$[A|b] = \left[\underbrace{\begin{matrix}-3 & 3\\ 5 & 2\end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix}6\\ -10\end{matrix}}_{\vec{b}}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \to \frac{1}{-3}\cdot\gamma_1} \left[\begin{matrix}1 & -1\\ 5 & 2\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix}-2\\ -10\end{matrix}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 5\gamma_1}$$

$$\left[\begin{matrix}1 & -1\\ 0 & 7\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix}-2\\ 0\end{matrix}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{7}\gamma_2} \left[\begin{matrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix}-2\\ 0\end{matrix}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 + \gamma_2} \left[\underbrace{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}}_{A_R} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix}-2\\ 0\end{matrix}}_{\overrightarrow{b_R}}\right] = [A_R|b_R]$$

Ο πίνακας $[A|b]$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $[A_R|b_R]$

Η λύση του συστήματος

Λύση του συστήματος

Η μορφή αυτή του πίνακα $[A_R|b_R]$ μας δίνει τη λύση του συστήματος:

$$[A_R|b_R] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ή σε μορφή πίνακα} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ λέμε ότι είναι συμβιβαστό και πιο συγκεκριμένα έχει μία και μοναδική λύση την $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ας παρατηρήσουμε τον πίνακα $[A_R|b_R]$:

$$[A_R|b_R] = \underbrace{\underbrace{\begin{array}{cc} x & y \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right. \end{array}}_{rank(A)=2} \left|\begin{matrix} -2 \\ 0 \end{matrix}\right]}_{rank[A|b]=2}$$

Παρατηρούμε πως ο βαθμός του πίνακα A είναι ίδιος με τον βαθμό του επαυξημένου $[A|b]$ του συστήματος.

$rank(A) = rank[A|b]$ = πλήθος των pivots = πλήθος των μη μηδενικών γραμμών (σε κλιμακωτή μορφή)=2

Η μορφή του επαυξημένου πίνακα $[A_R|b_R]$ καθορίζει το πλήθος των λύσεων του συστήματος.

Ορισμοί-υπενθύμιση

- Ομογενές σύστημα όταν οι σταθεροί όροι είναι μηδενικοί, όταν δηλαδή $\vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\mathbf{0}}$.
- Συμβιβαστό σύστημα όταν έχει τουλάχιστον μία λύση.
- Ασυμβίβαστο σύστημα όταν δεν έχει λύση, δηλαδή είναι αδύνατο.

Επίλυση γραμμικού συστήματος $\boldsymbol{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$, $\boldsymbol{A \in M_{\mu\times\nu}}$ *(rank)*

Έστω το γραμμικό σύστημα $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, με μ εξισώσεις και ν αγνώστους.

Αν $[A|b]$ είναι ο επαυξημένος πίνακας, τότε:

(i) $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ <u>ασυμβίβαστο</u> αν και μόνο αν $rank(A) \neq rank[A|b]$.

(ii) $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ <u>συμβιβαστό</u> αν και μόνο αν $rank(A) = rank[A|b]$.

- Σε περίπτωση που $rank(A) = \nu = rank[A|b]$ έχει <u>μία και μοναδική λύση</u>.
- Αλλιώς, έχει <u>άπειρες λύσεις</u> με $\nu - rank(A)$ ελεύθερες μεταβλητές.

Επίλυση γραμμικού συστήματος $\boldsymbol{A\cdot\vec{x}=\vec{b},\ A\in M_{\mu\times\nu}}$ (*μορφή πίνακα*)

Έστω το γραμμικό σύστημα $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$, με μ εξισώσεις και ν αγνώστους. Αν ο επαυξημένος πίνακας $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον ανηγμένο κλιμακωτό $[\boldsymbol{A_R}|\boldsymbol{b_R}]$και $\boldsymbol{\kappa}$ είναι το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του $\boldsymbol{A_R}$ τότε:

(i) Αν υπάρχει γραμμή [0 0 0 … 0 / c], με $c\neq 0$, στον ανηγμένο κλιμακωτό, τότε το σύστημα είναι ασυμβίβαστο (αδύνατο). (δηλ. αν $b_{R_i}\neq 0$ για κάποιο $i\in\{\kappa+1,\kappa+2,\dots,\mu\}$)

(ii) Αν δεν υπάρχει γραμμή [0 0 0 … 0 / c], με $c\neq 0$, στον ανηγμένο κλιμακωτό, τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό. (δηλ. αν $b_{R_i}=0$ για κάθε $i\in\{\kappa+1,\kappa+2,\dots,\mu\}$)

- Αν $\boldsymbol{\kappa=\nu}$ τότε το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση.
- Αν $\boldsymbol{\kappa<\nu}$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. (Θεωρούμε $\boldsymbol{\nu-\kappa}$ αγνώστους που αντιστοιχούν στις στήλες του ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα, που δεν περιέχουν κάποιο από τα ηγετικά στοιχεία 1, ως ελεύθερους αγνώστους και εκφράζουμε τους υπόλοιπους αγνώστους ως συναρτήσεις των ελεύθερων αγνώστων.

Παράδειγμα 2: μη ομογενές σύστημα 3×4

$$\begin{cases} u + 2v + 3w + z = 3 \\ v - w + 2z = 4 \\ u + 3v + 2w + 3z = 7 \end{cases}$$

Επαυξημένος Πίνακας

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$rank(A) = 2$

$rank[A|b] = 2$

$\xrightarrow{rank}$ Αφού $\boxed{rank(A) = rank[A|b]}$ το σύστημα είναι συμβιβαστό!

Ας δούμε τώρα τη μορφή των λύσεων.

Παράδειγμα 2: (μη ομογενές σύστημα $\mathbf{3 \times 4}$) - Μορφή των λύσεων

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$\begin{array}{c} \quad\;\; \boldsymbol{u} \quad\;\; \boldsymbol{v} \quad\;\; \boldsymbol{w} \quad\;\; \boldsymbol{z} \qquad\quad \\ [\boldsymbol{A_R} | \boldsymbol{b_R}] = \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \end{array}$$

$$\boldsymbol{u} = -\mathbf{5} - \mathbf{5}\boldsymbol{w} + \mathbf{3}\boldsymbol{z}$$
$$\boldsymbol{v} = \mathbf{4} + \boldsymbol{w} - \mathbf{2}\boldsymbol{z}$$
$$\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

2 pivots columns
($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ βασικοί άγνωστοι)

Free columns (ελεύθεροι άγνωστοι):
Αντιστοιχούν στους ελεύθερους αγνώστους-
ελεύθερες μεταβλητές $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z}$

Η μετάβαση από τη μορφή του πίνακα στη συμβολική, επεξηγείται στην επόμενη διαφάνεια.

Παράδειγμα 2: (μη ομογενές σύστημα 3×4)

Η μετάβαση από τη μορφή του πίνακα στη συμβολική

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\pi o\lambda\lambda a\pi\lambda a\sigma\iota a\sigma\mu \acute{o}\varsigma \\ \pi\iota\nu a\kappa\omega\nu}}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1u + 0v + 5w - 3z \\ 0u + 1v - 1w + 2z \\ 0u + 0v + 0w + 0z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{\iota\sigma\acute{o}\tau\eta\tau a \\ \pi\iota\nu a\kappa\omega\nu}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 1u + 0v + 5w - 3z = -5 \\ 0u + 1v - 1w + 2z = 4 \\ 0u + 0v + 0w + 0z = 0 \end{cases} \underset{\substack{\lambda\acute{\upsilon}\nu o\upsilon\mu\varepsilon\ \omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma \\ u\ \kappa a\iota v}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} u = -5 - 5w + 3z \\ v = 4 + w - 2z \end{cases}$$

Παράδειγμα 2: (μη ομογενές σύστημα 3×4) - Σύνολο λύσεων

Λύσεις του συστήματος αποτελούν όλα τα διανύσματα που μπορούν να γραφτούν στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-5w+3z \\ 4+w-2z \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5w \\ w \\ w \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z \\ -2z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Γενική μορφή λύσεων του συστήματος:

$$\boxed{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \in R, \mu \in R}$$

Παράδειγμα 3: μη ομογενές σύστημα 3×3

$$\begin{cases} u + 2v - 3w = 0 \\ 2u + 4v - 2w = 2 \\ 3u + 6v - 4w = 3 \end{cases}$$

Επαυξημένος Πίνακας

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[\boldsymbol{A_R}|\boldsymbol{b_R}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$rank(A) = 2$

$rank[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = 3$

$rank$

Αφού $\boxed{rank(A) \neq rank[A|b]}$ το σύστημα είναι <u>ασυμβίβαστο</u>!

Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το κενό.

Παράδειγμα 4: μη ομογενές σύστημα 3×5

$$\begin{cases} u + 2v - w + 3z + x = 2 \\ 2u + 4v - 2w + 6z + 3x = 6 \\ -u - 2v + w - z + 3x = 4 \end{cases}$$

Επαυξημένος Πίνακας

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$rank(A) = 3$

$rank[A|b] = 3$

$rank$

Αφού $\boxed{rank(A) = rank[A|b]}$ το σύστημα είναι <u>συμβιβαστό</u>!

Ας δούμε τώρα τη μορφή των λύσεων.

Παράδειγμα 4: (μετατροπή του πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό)

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 + \gamma_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \left(\frac{1}{2}\right)\gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - \gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - 3\gamma_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = [\boldsymbol{A_R}|\boldsymbol{b_R}]$$

Παράδειγμα 4: (μη ομογενές σύστημα 3×5) - Μορφή των λύσεων

Γραμμοισοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \begin{array}{cccccc} u & v & w & z & x & \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\Longrightarrow u = 3 - 2v + w$$

$$\Longrightarrow z = -1$$

$$\Longrightarrow x = 2$$

3 pivots columns

2 free columns:

Αντιστοιχούν στους ελεύθερους αγνώστους-ελεύθερες μεταβλητές v, w

Παράδειγμα 4: (μη ομογενές σύστημα 3×5) - Σύνολο λύσεων

Λύσεις του συστήματος αποτελούν όλα τα διανύσματα που μπορούν να γραφτούν στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2\,v+w \\ v \\ w \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2v \\ v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + v \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Γενική μορφή λύσεων του συστήματος:

$$\boxed{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda \in R, \mu \in R}$$

Παράδειγμα 5: μη ομογενές σύστημα 3×3

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \end{cases}$$

Επαυξημένος Πίνακας

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array}\right]$$

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$rank(A) = 3$

$rank[A|b] = 3$

$\xrightarrow{rank}$ Αφού $\boxed{rank(A) = rank[A|b]}$ το σύστημα είναι <u>συμβιβαστό</u>!

Αφού $\boxed{rank(A) = rank[A|b] = 3 = \nu}$ το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση!

Παράδειγμα 5: (μη ομογενές σύστημα 3×3) Σύνολο λύσεων

Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός

$$[A_R|b_R] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{array}$$

3 pivots columns

Λύσεις του συστήματος, η μία και μοναδική :

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Επίλυση ομογενούς γραμμικού συστήματος $\boldsymbol{A \cdot \vec{x} = \vec{0}}$, $\boldsymbol{A \in M_{\mu\times\nu}}$ *(rank)*

Έστω το ομογενές γραμμικό σύστημα $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$, με μ εξισώσεις και ν αγνώστους. Το ομογενές σύστημα είναι πάντα συμβιβαστό.

Πιο συγκεκριμένα:

(i) Αν $rank(A) = \nu = rank[A|b]$ έχει μία και μοναδική λύση τη μηδενική $\overrightarrow{0_{\nu\times 1}}$.

(ii) Αν $rank(A) = rank[A|b] < \nu$ έχει άπειρες λύσεις με $\nu - rank(A)$ ελεύθερες μεταβλητές .

Σημείωση: Μετά από την μελέτη αυτής της παραγράφου, τον γενικό τρόπο επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος, προτείνεται να ξαναδιαβάσετε την παράγραφο 4, τα παραδείγματα επίλυσης ομογενούς γραμμικού συστήματος. Πιθανώς, να το δείτε με άλλη οπτική γωνία και να είναι πιο κατανοητό.