ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
4. Επίλυση Ομογενούς Γραμμικού Συστήματος $A \cdot \vec{x} = \vec{0},\ A \in M_{\mu\times\nu}$ Παραδείγματα

Κάλλια Παυλοπούλου

2020-2021

Στη συνέχεια,

θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία των πινάκων για να αναπτύξουμε συστηματικές μεθόδους για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων (οι άγνωστοι υψωμένοι στην $1^η$ δύναμη).

Πιο συγκεκριμένα, θα αρχίσουμε περιγράφοντας μία μέθοδο η οποία βασίζεται στη θεωρία των γραμμοπράξεων.

<u>Παράδειγμα 1 :</u> Θα ξεκινήσουμε μελετώντας ένα παράδειγμα ενός γραμμικού συστήματος με 2 εξισώσεις και 2 αγνώστους όπου οι σταθεροί όροι είναι μηδενικοί.

γραμμικό σύστημα 2 × 2 ομογενές

2 άγνωστοι

1ος άγνωστος x

2ος άγνωστος y

2 εξισώσεις

1η εξίσωση

2η εξίσωση

$$\begin{cases} -3x + 3y = \boxed{0} \\ 5x + 2y = \boxed{0} \end{cases}$$

Σταθεροί όροι μηδενικοί

Όταν οι σταθεροί όροι ενός γραμμικού συστήματος είναι μηδενικοί, τότε το σύστημα ονομάζεται <u>ομογενές</u>

Παράδειγμα 1: ομογενές σύστημα 2×2

$$\begin{cases} -3x+3y=0 \\ 5x+2y=0 \end{cases}$$

Ας το γράψουμε σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} -3x+3y \\ 5x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-3 & 3\\5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$\vec{0}$:Πίνακας-στήλη (2×1)
σταθερών όρων του συστήματος

A : Πίνακας (2×2)
συντελεστών του συστήματος

$\vec{x}$: Πίνακας-στήλη (2×1)
οι άγνωστοι του συστήματος

Άρα το σύστημα παίρνει τη μορφή $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $A \in M_{2\times2}$

Το γραμμικό μας σύστημα «αντιπροσωπεύεται», καθορίζεται πλήρως, από τον επόμενο πίνακα (επαυξημένος) διότι διαθέτει όλες τις πληροφορίες : τους συντελεστές των αγνώστων και τους σταθερούς όρους!

Συντελεστές του x | Συντελεστές του y | Στήλη των σταθερών όρων

$$E = \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix}-3\\5\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}} \end{array}\right]$$

$\boldsymbol{E}$: Επαυξημένος πίνακας του συστήματος, παραθέτοντας δίπλα στον <u>πίνακα των συντελεστών</u> τη στήλη των <u>σταθερών όρων</u>

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Κάθε γραμμικό σύστημα εξισώσεων ανάγεται σε ένα ισοδύναμο γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον αρχικό αλλά σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Πολύ σημαντική πρακτική αξία!

Αναγωγή του επαυξημένου σε ανηγμένο κλιμακωτό

$$E = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \to \frac{1}{-3}\cdot\gamma_1} \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 5\gamma_1}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{matrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}_{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{7}\gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 + \gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = E_R$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{A_R} \quad \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}_{\vec{0}}$$

Ο πίνακας E είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον E_R και ο A με τον A_R

Ας δούμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον γραμμοϊσοδύναμο $\boldsymbol{E_R} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_R} \Bigg| \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{0}$

Λύνω ως προς x, y (pivots).

$$\mathrm{A}_R \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 0y = 0 \\ 0x + 1y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}}$$

Το οποίο είναι ισοδύναμο με το αρχικό $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Λύση του συστήματος

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Σε μορφή πίνακα

Το σύστημα $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ έχει μία και μοναδική λύση την $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ας παρατηρήσουμε τον πίνακα E_R :

$$E_R = \begin{array}{cc} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \end{array}$$

$$E_R = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Παρατηρούμε πως ο βαθμός του πίνακα A είναι ίδιος με τον βαθμό του επαυξημένου E του συστήματος.

$rank(A) = rank(E)$
= αριθμός των pivots = πλήθος των μη μηδενικών γραμμών (σε κλιμακωτή μορφή)=2

2 βασικοί άγνωστοι:
αντιστοιχούν στα pivots (x, y).

Παράδειγμα 2: ομογενές σύστημα 3×4

$$\left\{\begin{array}{l} 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

Σε μορφή πινάκων

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{0}$: Πίνακας-στήλη (3×1) σταθερών όρων του συστήματος

A : Πίνακας (3×4) συντελεστών του συστήματος

$\vec{x}$: Πίνακας-στήλη (4×1) οι άγνωστοι του συστήματος

Το γραμμικό μας σύστημα «αντιπροσωπεύεται» από τον επόμενο πίνακα (επαυξημένος) διότι διαθέτει όλες τις πληροφορίες : τους συντελεστές και τους σταθερούς όρους!

Συντελεστές του x_1

Συντελεστές του x_2

Συντελεστές του x_3

Συντελεστές του x_4

Στήλη των σταθερών όρων

$$E = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A} \qquad \underbrace{\quad}_{\vec{0}}$$

Αναγωγή του επαυξημένου σε ανηγμένο κλιμακωτό

$$E = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 3\gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{2}\gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 2\gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = E_R$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A_R} \quad \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{\vec{0}}$$

Ας δούμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον γραμμοϊσοδύναμο $E_R = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

A_R , 0

Λύνω ως προς x_1, x_3.

$$A_R \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_3 = \quad -2x_4 \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$$

Το οποίο είναι ισοδύναμο με το αρχικό $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Λύση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_2, x_4, \in R$$

Σε μορφή πίνακα

Το σύστημα $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_2, x_4, \in R$

Τις λύσεις θα μπορούσαμε να τις γράψουμε στην εξής μορφή (πίνακα-διανυσμάτων):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in R.$$

Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος αποτελείται από τα διανύσματα της μορφής :

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in R.}$$

Δηλαδή είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Δηλαδή το σύνολο λύσεων του συστήματος παράγεται από τα δύο αυτά διανύσματα.

Ας παρατηρήσουμε τον πίνακα E_R :

$$E_R = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Παρατηρούμε πως ο βαθμός του πίνακα A είναι ίδιος με τον βαθμό του επαυξημένου E του συστήματος.

$rank(A) = rank(E)$
= αριθμός των pivots = πλήθος των μη μηδενικών γραμμών (σε κλιμακωτή μορφή)=2

2 βασικοί άγνωστοι:
αντιστοιχούν στα pivots (x_1, x_3)

2 ελεύθεροι άγνωστοι:
αντιστοιχούν σε εκείνους όπου δεν υπάρχουν pivots στις αντίστοιχες στήλες(x_2, x_4).