ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR

Γ. Σμυρλής

1. Να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης και το ακριβές διάστημα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+3^n)x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^n+\frac{3^n}{n}\right)x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n\ .$$

[Για την τελευταία δίνεται ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$, για κάθε $n=1,2,\ldots$.]

2. Με χρήση γνωστών δυναμοσειρών, να βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις παρακάτω δυναμοσειρές πάνω σε κατάλληλα διαστήματα:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n\ (x\geq 0), \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

3. Ορίζουμε

$$\mathrm{Arctan}x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

(i) Να δείξετε ότι $\mathrm{Arctan}(1)=\pi/4$ (να θέσετε στο ολοκλήρωμα $x=\tan u$).

(ii) Να αναπτύξετε την παραπάνω συνάρτηση σε δυναμοσειρά γύρω από το 0 και να δώσετε το ακριβές διάστημα σύγκλισής της.

(iii) Να δείξετε ότι

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.$$

4. Να αναπτύξετε τις παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$ σε δυναμοσειρές γύρω από το σημείο $a\in\mathbb{R}$, δίνοντας κάθε φορά το ακριβές διάστημα σύγκλισής τους:

(i) $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$, $a=2$ (ii) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+9}$, $a=-2$

(iii) $f(x) = \ln(3x+2),\ \ a = 0$ (iv) $f(x) = \ln(3x-2),\ \ a = 4/3$

(v) $f(x) = \cos x,\ \ a = \pi/2$ (vi) $f(x) = \sin x,\ \ a = \pi/4$ (vi) $f(x) = \sin^2 x,\ \ a = 0.$

5. Να αναπτύξετε σε σειρά Maclaurin τη συνάρτηση $f(x) = x\cos(x^2)$ και να υπολογίσετε τις παραγώγους $f^{(11)}(0),\ f^{(12)}(0)$.

6. Να αναπτύξετε σε σειρά Maclaurin τις συναρτήσεις e^{x^3} , $\sin x - x\cos x$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{\sin x - x\cos x}\ .$$

7. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [0, 1/2]$, παίρνουμε την προσέγγιση

$$e^{-x^2} \simeq 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}\ ,$$

με σφάλμα μικρότερο του $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \frac{1}{5!}$.

8. Υπολογίστε προσεγγιστικά τους αριθμούς $\sqrt[3]{e}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-3}. Δίνεται ότι $\sqrt[3]{e} < 3/2$.

9. Υπολογίστε προσεγγιστικά τον αριθμό $\ln(1.1)$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-4}.

10. Να δείξετε ότι:

(i) $|\sin x - x| \leq \frac{1}{6}\cdot 10^{-3}$, για $|x| \leq 1/10$.

(ii) $\left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{24}\cdot 10^{-4}$, για $|x| \leq 1/10$.

(iii) $\left|\sin(x^2) - \left(\frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!}\right)\right| \leq \frac{|x|^{14}}{7!}$, για $x \in \mathbb{R}$.

(iv) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, για $x > 0$.