Γραμμική Άλγεβρα 2019-2020

Ιδιοτιμές-Ιδιοδιανύσματα

Παυλοπούλου Κάλλια

Παράδειγμα

- Να βρεθούν οι ιδιοτιμές το πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$.
- Λύση

- Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α είναι
- $det(A - \lambda I_3) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$

- Και η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

- Διαιρέτες του σταθερού όρου -4, άρα $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.
- Παρατηρούμε ότι η λ=4 είναι μια ακέραια λύση
- Άρα
- $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = (\lambda - 4)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 1\right)$

- Άρα
- Χαρακτηριστική εξίσωση

$$(\lambda - 4)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 1\right) = 0$$

- λ=4 ή λ=2+$\sqrt{3}$ ή λ=2-$\sqrt{3}$
- Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι οι

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$$

Εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

- 1) Υπολογισμός του πίνακα $[A - \lambda I_n]$, ο οποίος προκύπτει αν από την κύρια διαγώνιο του A αφαιρέσουμε την παράμετρο λ.
- 2) Υπολογισμός της $\det(A - \lambda I_n) = X_A(\lambda)$.
- 3) Επίλυση της εξίσωσης $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Οι ρίζες αυτού του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του A.
- 4) Για κάθε ιδιοτιμή βρίσκουμε μία βάση του ιδιόχωρου $V_\lambda(A)$ λύνοντας το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$.

Παράδειγμα

- Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.
- Λύση:
- 1) $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$
- 2) $det(A - \lambda I_2) = X_A(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$
- 3) $det(A - \lambda I_2) = X_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$ είναι οι ιδιοτιμές του A.

- 4A) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε:
- $(A - \lambda_1 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 4 & 3-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1]{\gamma_1 \to \frac{1}{2}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1$

<u>y ελεύθερη μεταβλητή</u>

<u>x βασική μεταβλητή</u>

- $(A - \lambda_1 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_1 \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$
- $\begin{cases} x + y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}, y \in R \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 0 = 0 \end{cases}, y \in R$

Άρα ο ιδιοχώρος $V_{-1}(A)$ έχει διανύσματα της μορφής:

- $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, y \in R.$

Και μια βάση B_{-1} του ιδιοχώρου $V_{-1}(A)$ είναι:

$$B_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -1 είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $y \neq 0$.

- 4B) Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$ έχουμε:
- $(A - \lambda_2 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$
- $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_2 \to \gamma_2 + \gamma_1]{\gamma_1 \to \frac{1}{-4}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$

<u>y ελεύθερη μεταβλητή</u>

<u>x βασική μεταβλητή</u>

$$(A - \lambda_2 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_2\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{y}{2} = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}, y \in R$$

Άρα ο ιδιοχώρος $V_5(A)$ έχει διανύσματα της μορφής:

- $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{2} \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, y \in R.$

Και μια βάση B_5 του ιδιοχώρου $V_5(A)$ είναι: $\quad B_5 = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \right\}.$

Δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του Α που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 5 είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $y \neq 0$.

- **Παρατήρηση:**
- **Αν ζητηθεί η ορίζουσα του Α, δεν χρειάζεται να κάνω υπολογισμούς εξαρχής, αλλά μπορούμε απευθείας από την χαρακτηριστικό πολυώνυμο αντικαθιστώντας λ=0.**
- **Διότι:**
- $\det(A - \lambda I_2) = X_A(\lambda)$
- $\det(A) = \det(A - 0I_2) = X_A(0)$
- **Στο παράδειγμά μας:**
- $\det(A - 0I_2) = X_A(0) = 0^2 - 0 - 5 = -5$

Ιδιότητες ιδιοτιμών

- 1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \ \ldots + \ \lambda_n = tr(A)$, δηλ. το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.
- 2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ \ldots \cdot \ \lambda_n = detA$, δηλ. το γινόμενο των ιδιοτιμών είναι ίσο με την ορίζουσα του Α.
- 3) $detA = 0$ αν και μόνο αν τουλάχιστον μια ιδιοτιμή είναι ίση με 0.
- 4) Οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου ή τριγωνικού πίνακα είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου.
- 5) Οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι και ιδιοτιμές του A^T.
- 6) Αν ο Α είναι αντιστρέψιμος, τότε οι ιδιοτιμές του A^{-1} είναι οι $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$

Προσοχή!

- **Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές ($\lambda_i \neq \lambda_j$) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.**