Γραμμικά Συστήματα Αχ=b

Γραμμική Άλγεβρα 2019-20

Παράδειγμα 1 (μία και μοναδική λύση)

- $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \end{cases} \qquad (S)$

- Επαυξημένος Πίνακας $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array}\right]$

- Γραμμοισοδύναμος με $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

- Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την διατεταγμένη τριάδα στο R^3 : $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 2

- $$\begin{cases} u + 2v + 3w + z = 3 \\ v - w + 2z = 4 \\ u + 3v + 2w + 3z = 7 \end{cases} \qquad \text{(S1)}$$

- Επαυξημένος Πίνακας $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right]$

- Γραμμοισοδύναμος με $\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
- r=2

Άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με

$$\begin{cases} 1u + 0v + 5w - 3z = -5 \\ 0u + 1v - 1w + 2z = 4 \\ 0u + 0v + 0w + 0z = 0 \end{cases}$$

(S1’), δηλαδή με το

Αληθεύει για όλες τις τιμές των w, z

Ορίζουμε **ελεύθερους αγνώστους w και z** και εκφράζουμε τους άλλους ως συνάρτηση αυτών:

Άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με

$$\begin{cases} 1u + 0v = -5 + 5w + 3z \\ 0u + 1v = 4 + 1w - 2z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Σύνολο λύσεων

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-5w+3z \\ 4+w-2z \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3

- $$\begin{cases} u + 2v - 3w = 0 \\ 2u + 4v - 2w = 2 \\ 3u + 6v - 4w = 3 \end{cases} \qquad (S2)$$
- Πίνακας συντελεστών $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα

- Επαυξημένος Πίνακας $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{array}\right]$

- Γραμμοισοδύναμος με $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

- Άρα το αρχικό σύστημα είναι γραμμοισοδύναμο με το σύστημα

- $$\begin{cases} 1u + 2v + 0w = 3/2 \\ 0u + 0v + 1w = 1/2 \\ 0u + 0v + 0w = 1/2 \end{cases} \qquad (S2')$$

- Από την τρίτη εξίσωση συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο! Άρα δεν έχει λύση.

Παράδειγμα 4

- $$\begin{cases} u + 2v - w + 3z + x = 2 \\ 2u + 4v - 2w + 6z + 3x = 6 \\ -u - 2v + w - z + 3x = 4 \end{cases} \qquad (S3)$$
- Επαυξημένος πίνακας $\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right]$

- Γραμμοισοδύναμος πίνακας $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

- Άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με

- $$\left\{\begin{array}{l} \boxed{1u} + 2v - w + 0z + 0x = 3 \\ 0u + 0v + 0w + \boxed{1z} + 0x = -1 \\ 0u + 0v + 0w + 0z + \boxed{1x} = 2 \end{array}\right. \qquad (S2'),$$

- δηλαδή με το

$$\begin{cases} u = 3 - 2v + w \\ z = -1 \\ x = 2 \end{cases} \qquad (S2')$$

Ορίζουμε ελεύθερους αγνώστους τις μεταβλητές v, w , δηλ. να παίρνουν αυθαίρετες τιμές.

Έτσι, η u είναι συνάρτηση των v, w .

- Άρα έχουμε άπειρες λύσεις, τις:
- (3-2v+w, v, w, -1,2) με v, w πραγματικούς ή αλλιώς
- (3-2v+w, v, w, -1,2)=
- (3,0,0,-1,2)+v (-2, 1, 0, 0, 0) + w (1, 0, 1, 0, 0)