Επίλυση Ομογενούς Συστήματος $m \times n$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

2019-2020

- <u>Συμβιβαστό</u> αν έχει τουλάχιστον μία λύση

- <u>Ασυμβίβαστο</u> αν δεν έχει λύση, είναι αδύνατο.

Παράδειγμα: ομογενές σύστημα 3×4

- $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας σταθερών όρων του συστήματος, $m \times 1$ διαστάσεων

Πίνακας συντελεστών του συστήματος, $m \times n$ διαστάσεων

Κάθε γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι ανηγμένος (αναγμένος) κλιμακωτός.

***** Πολύ σημαντική πρακτική αξία!**

Αναγωγή σε ανηγμένο κλιμακωτό

(R=reduced row echelon form, when zeros below + above pivots 1)

- $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 3\gamma_1}$$

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{2}\gamma_2}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 2\gamma_2}$

- $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_2}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
R = & \multicolumn{4}{c}{\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}
\end{array}
$$

Rank of A= the number of pivots=2

Rank (A) το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών

<u>2 pivots columns</u>

<u>Free columns:</u>

Αντιστοιχούν στους ελεύθερους αγνώστους- ελεύθερες μεταβλητές x_2, x_4

Ανάγεται σε ισοδύναμο σύστημα $3\times \mathbf{4}$

- $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

$$\left\{ \begin{matrix} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_3 = \qquad\quad -2x_4 \\ 0 = 0 \end{matrix} \right\}$$

- Άρα,

- $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_3 = \quad\quad\quad -2x_4 \end{cases}$, $\delta\eta\lambda\alpha\delta\eta$

- $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in R.$

Σύνολο λύσεων συστήματος

- **Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος αποτελείται από τα διανύσματα της μορφής :**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in R.$$

- **Δηλαδή είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων** $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **και** $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- **Δηλαδή το σύνολο λύσεων παράγεται από τα δύο αυτά διανύσματα.**

m rows and n columns

r = Rank of A= the number of pivots=the number of <u>pivots variables</u>

n-r = number of <u>free variables</u>

Επίλυση μη ομογενούς συστήματος $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

2019-2020

Σύστημα αδύνατο:

- Αν ο βαθμός του πίνακα Α είναι διαφορετικός από τον βαθμό του επαυξημένου του πίνακα τότε το σύστημα είναι αδύνατο, δηλαδή δεν έχει λύση.

- Αν στον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα υπάρχει γραμμή της μορφής [0 0 0 … 0 / b], $b \neq 0$, τότε το σύστημα είναι <u>αδύνατο</u>.

Σύστημα συμβιβαστό:

- Αν ο βαθμός του πίνακα A είναι ίσος με τον βαθμό του επαυξημένου του πίνακα τότε το σύστημα έχει λύση.

- **Αν δεν υπάρχουν γραμμές της μορφής [0 0 0 … 0 / b], $b \neq 0$, και έχουμε συνολικά r μη μηδενικές γραμμές (r< min{m,n}), τότε θεωρούμε n-r αγνώστους που αντιστοιχούν σε στήλες του ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα, που δεν περιέχουν κάποιο από τα ηγετικά στοιχεία 1, ως <u>αυθαίρετους αγνώστους</u> και εκφράζουμε τους υπόλοιπους αγνώστους ως συναρτήσεις των αυθαίρετων αγνώστων.**

Επίλυση συστήματος $n \times n$
Μέθοδος Cramer
$\boldsymbol{A \cdot x = b}$

2019-2020

Σε σύστημα $n \times n$:

- **Ονομάζουμε A_i , τον πίνακα που προκύπτει όταν αντικαταστήσουμε την i-στήλη με την στήλη των σταθερών όρων b.**
- **Τότε διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:**

- **1) Αν $detA \neq 0$, τότε το σύστημα έχει <u>μοναδική λύση</u> την**

- $\boldsymbol{x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}}$

- **2α) Αν $detA = 0$, και τουλάχιστον μία από τις ορίζουσες A_i είναι διάφορη του μηδενός, τότε το σύστημα είναι αδύνατο .**

- **2β) Αν $detA = 0$, και $detA_i = 0, \forall\ i \ \in N, 1 \leq i \leq n$, τότε το σύστημα είναι αόριστο ή αδύνατο.**

Παράδειγμα

- **Αν λ μία παράμετρος, να λυθεί το σύστημα**

- $$\begin{cases} (\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1})\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\lambda}^{2} \end{cases}$$

Λύση

$$detA = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$$

- $\begin{vmatrix} \lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$

- $\begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \cdot (\lambda+3)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις για το λ…