ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κάλλια Παυλοπούλου

Άσκηση 1

1) Να εξετάσετε αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Αν ναι, να βρείτε τον αντίστροφό του με τη χρήση γραμμοπράξεων.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Με βάση τους υπολογισμούς στο (1), και χωρίς να την υπολογίσετε, ποια είναι η ορίζουσα *detA* του A;

3) Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \end{array}\right\}$$

- <u>Λύση</u>

1) Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο εύρεσης αντιστρόφου:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-1} & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{\xrightarrow{\gamma_1 \to -\gamma_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{\xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{5}\gamma_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3/5 & -1/5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{\gamma_3 \to \frac{1}{2}\gamma_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - \gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & \boxed{-2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 + 2\gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{-3} & 0 & -4/10 & -2/10 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 + 3\gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/10 & 7/10 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array}\right)$$

Μοναδιαίος

Αντίστροφος A^{-1}

2) Με βάση τον υπολογισμούς στο (1), και χωρίς να την υπολογίσετε, ποια είναι η ορίζουσα *detA* του A;

- Πρέπει να δούμε:

α) ποιες από τις γραμμοπράξεις επηρεάζουν τον υπολογισμό της ορίζουσας

β) πώς επηρεάζουν τον υπολογισμό της;

- *Πάμε λοιπόν, να ανατρέξουμε στις ιδιότητες των οριζουσών:*

- ***<u>Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής</u>***

  <u>με τον αριθμό λ,</u>

  <u>τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ.</u>

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda\cdot\beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \lambda\cdot\beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \lambda\cdot\beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \quad -\lambda\cdot\beta_1\cdot\mathrm{B}_1+\lambda\cdot\beta_2\cdot\mathrm{B}_2-\lambda\cdot\beta_3\cdot\mathrm{B}_3 =$$

$$= \lambda\cdot(-\beta_1\cdot\mathrm{B}_1+\beta_2\cdot\mathrm{B}_2-\beta_3\cdot\mathrm{B}_3) = \lambda\cdot D$$

- *Αν στα στοιχεία μιας γραμμής προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής πολλαπλασιασμένα επί λ,*
- *τότε η ορίζουσα δε μεταβάλλεται.*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 + \lambda \cdot a_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 + \lambda \cdot a_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 + \lambda \cdot a_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \lambda \cdot a_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \lambda \cdot a_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \lambda \cdot a_3 \end{vmatrix}}_{\textit{Δύο στήλες ανάλογες}} = \qquad D + 0 = D$$

Γραμμοπράξεις-υπολογισμός ορίζουσας

- Παρατηρώντας τις γραμμοπράξεις που κάναμε, εκείνες που επηρεάζουν τον υπολογισμό της ορίζουσας είναι οι εξής:

- 1) $\gamma_1 \rightarrow -\gamma_1$

Εδώ πολλαπλασιάζεται η ορίζουσα που μένει με -1

- 2) $\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{5}\gamma_2$

Εδώ πολλαπλασιάζεται η ορίζουσα που μένει με 5

- 3) $\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_3$

Εδώ πολλαπλασιάζεται η ορίζουσα που μένει με 2

Πιο συγκεκριμένα

- Π.χ.

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{5}\gamma_2} \mathbf{A_1}$$

$$detA_1 = \frac{1}{5}\, detA \Leftrightarrow detA = 5 \cdot detA_1$$

Επομένως:

- $\boldsymbol{detA = (-1) \cdot 5 \cdot 2 \cdot detA_{\alpha\nu\eta\gamma\mu\varepsilon\nu o\varsigma\ \kappa\lambda\iota\mu\alpha\kappa\omega\tau o\varsigma} =}$

$$\boldsymbol{(-1) \cdot 5 \cdot 2 \cdot detI_3 =}$$

$$\boldsymbol{(-1) \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 = -10}$$

3) Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

- Ο πίνακας του συστήματος είναι ο αντιστρέψιμος πίνακας Α.
- Άρα το σύστημα γράφεται:
- $\mathrm{A} \cdot X = \Sigma$, $ό\pi o\upsilon$ $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $\kappa\alpha\iota$ $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.
- Επειδή ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος,

$$\mathrm{A} \cdot X = \Sigma \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot \Sigma \Leftrightarrow \ldots\ldots$$

Με πολλαπλασιασμό πινάκων:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/5 \\ -14/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}.$$

<u>Σημείωση:</u> θα μπορούσαμε να το λύσουμε με τη μέθοδο του επαυξημένου πίνακα μετατρέποντάς τον σε ανηγμένο κλιμακωτό.

Άσκηση 2

1) Αν a, b, c, x πραγματικοί αριθμοί, να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{bmatrix}$$

2) Στη συνέχεια, για $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \geq 0$, να λυθεί ως προς x η εξίσωση:

$$|\mathbf{A}| = 0$$

Λύση:

- $|A| = \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = (\Sigma 1 \rightarrow \Sigma 1 - \Sigma 2 \; \kappa\alpha\iota \; \Sigma 2 \rightarrow \Sigma 2 - \Sigma 3) =$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0+x \\ -b & b & 0+x \\ 0 & -c & c+x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & x \\ -b & b & x \\ 0 & -c & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -b & b & 0 \\ 0 & -c & c \end{vmatrix} =$$

τριγωνικος πινακας

Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου

$$x \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ -b & b & 1 \\ 0 & -c & 1 \end{vmatrix} + abc = (\Gamma2 \to \Gamma2 - \Gamma1 \text{ και } \Gamma3 \to \Gamma3 - \Gamma1) =$$

$$x \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \\ -b-a & b & \\ -a & -c & \end{vmatrix} + abc =$$

$$(\alpha\nu\alpha\pi\tau\upsilon\gamma\mu\alpha\ \kappa\alpha\tau\alpha\ \tau\alpha\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha\ \tau\eta\varsigma\ \tau\rho\iota\tau\eta\varsigma\ \sigma\tau\eta\lambda\eta\varsigma) =$$

$$x \cdot \begin{vmatrix} -b-a & b \\ -a & -c \end{vmatrix} + abc =$$

$$x \cdot \begin{vmatrix} -b-a & b \\ -a & -c \end{vmatrix} + abc =$$

$$x \cdot [(-b-a) \cdot (-c) - (-a) \cdot b] + abc =$$

$$= x \cdot (bc + ac + ba) + abc$$

Επομένως:

$$\boxed{|\mathrm{A}| = abc + \ x \cdot (ab + ac + bc)}$$

Για ποιες τιμές του x έχουμε detA=0;

- **Αν όλοι οι αριθμοί a, b, c είναι μη μηδενικοί** τότε προφανώς $ab+ac+bc>0$ και η εξίσωση $|A|=0$,
- έχει μοναδική λύση την

- $|A|=0 \Leftrightarrow abc+\ x\cdot(ab+ac+bc)=0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{x=\frac{-abc}{ab+ac+bc}}$$

- Αν ακριβώς <u>μόνο ένα </u>από τα a, b, c είναι ίσο με μηδέν, τότε η εξίσωση

$$|A| = 0 \Leftrightarrow abc + \ x \cdot (ab + ac + bc) = 0$$

  - Έχει μοναδική λύση την $\boxed{\text{x=0.}}$

- Πράγματι, έστω a=0 και b, c>0. Τότε:

$$0 + \ x \cdot (0 + 0 + bc) = 0 \Leftrightarrow x \cdot bc = 0 \xLeftrightarrow{b>0,c>0} x = 0$$

- Αν <u>δύο από τους αριθμούς a, b, c είναι ίσοι με μηδέν</u>, τότε η εξίσωση δέχεται κάθε πραγματικό αριθμό x ως λύση.

  - Πράγματι, αυτό προκύπτει επειδή έχουμε

(έστω a=0 και b=0)

$$abc = 0 \; και \;\; ab + ac + bc = 0$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow abc + \; x \cdot (ab + ac + bc) = 0 \Leftrightarrow \; 0 + x \cdot 0 = 0$$

$$\boxed{Άρα\ εχουμε\ x \cdot 0 = 0}$$

Μερικές Ιδιότητες οριζουσών-επανάληψη

- *Η ορίζουσα δε μεταβάλλεται αν οι γραμμές γίνουν στήλες με την ίδια διάταξη.*
- *Για να υπολογίσουμε μια ορίζουσα μπορούμε να πάρουμε το ανάπτυγμά της κατά τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης.*
- *Αν εναλλάξουμε τη θέση δυο γραμμών (ή στηλών) μιας ορίζουσας, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.*
- *Αν μια ορίζουσα έχει δυο γραμμές ή δυο στήλες με ίδια στοιχεία τότε η ορίζουσα είναι μηδέν.*
- *Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής με τον αριθμό λ, τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ.*
- *Αν τα στοιχεία δυο γραμμών είναι ανάλογα τότε η ορίζουσα είναι μηδέν.*
- *Αν κάθε στοιχείο μιας γραμμής είναι άθροισμα δυο προσθετέων τότε η ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δυο οριζουσών.*
- *Αν στα στοιχεία μιας γραμμής προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής πολλαπλασιασμένα επί λ, η ορίζουσα δε μεταβάλλεται.*
- *Μια ορίζουσα που αντιστοιχεί σε τριγωνικό πίνακα, είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων της.*