Γραμμική Άλγεβρα 2019-2020

Διαγωνοποίηση Πίνακα

Παυλοπούλου Κάλλια

Βήματα για τη διαγωνοποίηση πινάκων

- 1) Υπολογισμός του πίνακα $[A-\lambda I_n]$, ο οποίος προκύπτει από τον Α με την αφαίρεση της παραμέτρου λ από την κύρια διαγώνιο.
- 2) Υπολογισμός της $\det(A-\lambda I_n) = X_A(\lambda)$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α ως προς λ.
- 3) Επίλυση της εξίσωσης $X_A(\lambda) = 0$, δηλ. της $\det(A-\lambda I_n) = 0$. Οι διαφορετικές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$ $(\mu\varepsilon\ \rho \leq n)$ αυτού του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του Α.

- 4) Βρίσκουμε μια βάση B_{λ_1} του χώρου $V_{\lambda_1}(A)$.
- Βρίσκουμε μια βάση B_{λ_2} του χώρου $V_{\lambda_2}(A)$.
- $\vdots$
- Βρίσκουμε μια βάση B_{λ_ρ} του χώρου $V_{\lambda_\rho}(A)$.
- 5) Θεωρούμε το σύνολο $B = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup \cdots \cup B_{\lambda_\rho}$.
- 6) Αν το B έχει n διανύσματα τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, αλλιώς όχι.

- 7) Αν ο Α είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή αν $B = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}\}$ τότε:

$$P = \underbrace{[\overrightarrow{x_1} | \overrightarrow{x_2} | \dots | \overrightarrow{x_n}]}_{\text{Πίνακας με στήλες τις συνιστώσες των ιδιοδιανυσμάτων}} \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Όπου οι ιδιοτιμές λ_j είναι τοποθετημένες στον D με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον P.

Άσκηση 1

- Δίνεται ο πίνακας $A \in R^{3\times3}$ με $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.
- Α) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και τις ιδιοτιμές του A.
- Β) Να δείξετε ότι ο A διαγωνοποιείται και να βρείτε έναν πίνακα P που τον διαγωνοποιεί καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο D .
- Γ) Να βρείτε τον A^{80}.
- Δ) Να υπολογίσετε άμεσα την ορίζουσα $detA$ με χρήση του $X_A(\lambda)$ που βρήκατε.

Λύση άσκησης 1

- A) χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_{\mathrm{A}}(\lambda)$ και τις ιδιοτιμές του A :
- $X_{\mathrm{A}}(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 0-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$
- $(3-\lambda)\cdot[-\lambda(3-\lambda)-4] - 2[2(3-\lambda)-8] + 4(4+4\lambda) =$
- $(3-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda - 4\right) - 2(-2\lambda - 2) + 16(\lambda+1) =$
- $(3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-4) + 20(\lambda+1) =$
- $(\lambda+1)[(3-\lambda)(\lambda-4)+20] =$
- $(\lambda+1)\left(-\lambda^2 + 7\lambda + 8\right) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8).$

Δηλαδή:

- $\boxed{X_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8\,.}$

- Για να βρούμε τις ιδιοτιμές θέτουμε:

$$X_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1\ (\delta\iota\pi\lambda\eta) \\ \lambda_2 = 8 \end{cases}$$

- Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι οι εξής:

$$\boxed{\lambda_1 = -1\ (\delta\iota\pi\lambda\eta)\kappa\alpha\iota\ \lambda_2 = 8\,.}$$

Β) Για να δούμε αν ο Α $\boxed{\text{διαγωνοποιείται,}}$

πρέπει να βρούμε μια $\boxed{\text{βάση}}$ B_{λ_1} του ιδιόχωρου του Α ως

προς κάθε ιδιοτιμή του $V_{\lambda_1}(A)$

άρα πρέπει να βρούμε τα $\boxed{\text{ιδιοδιανύσματα}}$ για κάθε

ιδιοτιμή.

1) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε :

$$(A-\lambda_1 I_3)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow [A-(-1)I_3]\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λύση ομογενούς συστήματος

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \to \frac{1}{4}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1$$

Γραμμοπράξεις στον πίνακα του συστήματος

<u>y, z ελεύθερες μεταβλητές</u>

<u>x βασική μεταβλητή</u>

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε λοιπόν:
- $(A - \lambda_1 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_1\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

- $\boxed{\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y - z \\ y \\ z \end{cases}, y \in R, z \in R.}$

- Άρα ο ιδιοχώρος $V_{-1}(A)$ έχει διανύσματα της μορφής:

- $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, y \in R, z \in R.$

Και μια βάση B_{-1} του ιδιοχώρου $V_{-1}(A)$ είναι:

$$\boxed{B_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.}$$

2) Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$ έχουμε :

$$(A-\lambda_2 I_3)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow [A-8\cdot I_3]\,\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λύση ομογενούς συστήματος

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - 2\gamma_2]{\gamma_1 \to -\frac{1}{5}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 2 & -8 & 2 \\ 0 & 18 & -9 \end{bmatrix} \to \dots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$$

Γραμμοπράξεις στον πίνακα του συστήματος

<u>x, y βασικές μεταβλητές</u>

<u>z ελεύθερη μεταβλητή</u>

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$ έχουμε λοιπόν:

$$(A - \lambda_2 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_2\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x = z \\ y = \frac{1}{2}z \\ z \end{cases}, z \in R.}$$

Άρα ο ιδιοχώρος $V_8(A)$ έχει διανύσματα της μορφής:

- $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R.$

Και μια βάση B_8 του ιδιοχώρου $V_8(A)$ είναι:

$$\boxed{B_8 = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

Εύρεση του συνόλου $B = B_{-1} \cup B_8$:

- $B = B_{-1} \cup B_8 = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
- Άρα το B έχει 3 διανύσματα και άρα ο A έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα . Επειδή $n = 3 = dimB$ συνεπάγεται ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Εύρεση διαγώνιου πίνακα :

- Άρα ο πίνακας P που διαγωνοποιεί τον A είναι ο εξής:
- $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$

Ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα του B

- Και ο αντίστοιχος διαγώνιος όμοιος με τον A είναι ο εξής:
- $D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$

Ο πίνακας με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο τοποθετημένες με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον P.

Γ) Υπολογισμός του A^{80};

- Γνωρίζουμε ότι $A^{80} = P \cdot D^{80} \cdot P^{-1}$.

Αν $A, B \in M_{n\times n}$ όμοιοι πίνακες δηλ.
$P^{-1}AP = B$ τότε ισχύει
$B^k = P^{-1}A^kP, \forall k \in N$

- Επομένως:

- $D^{80} = \begin{bmatrix} (-1)^{80} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{80} & 0 \\ 0 & 0 & 8^{80} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{240} \end{bmatrix}$

- Με απαλοιφή Gauss-Jordan βρίσκουμε:

- $P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$

Αν Α διαγώνιος πίνακας η νιοστή δύναμη του Α είναι ίση με τον πίνακα με υψωμένα εις την ν μόνο τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου.

Επομένως:

- $A^{80} = P \cdot D^{80} \cdot P^{-1} =$
- $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{240} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \cdots =$

Επομένως:

$$A^{80} = \begin{bmatrix} \dfrac{5+2^{242}}{9} & \dfrac{2^{241}-2}{9} & \dfrac{2^{242-4}}{9} \\ \dfrac{2^{241}-2}{9} & \dfrac{2^{240}+8}{9} & \dfrac{2^{241}-2}{9} \\ \dfrac{2^{242}-4}{9} & \dfrac{2^{241}-2}{9} & \dfrac{5+2^{242}}{9} \end{bmatrix}$$

Δ) Υπολογισμός $\boldsymbol{detA}$

- $\boldsymbol{detA = X_A(0) = -0^3 + 6 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + 8 = 8}$.

- Άρα $\boldsymbol{detA = 8}$.

Β’ τρόπος

- Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την ορίζουσα του Α ως γινόμενο των ιδιοτιμών:

- $A, D\ \text{ομοιοι πινακες} \Rightarrow\ detA = detD \xRightarrow[D\ \text{διαγώνιος}]{}$

$$detD = \text{γινομενο των διαγωνιων στοιχειων} \Rightarrow$$

$$detD = \text{γινομενο των ιδιοτιμων του Α}!$$

- Άρα

$$\boxed{detA = (-1)(-1)8 = 8}$$

<u>Σημείωση:</u>

- **Την ιδιοτιμή λ=-1 η οποία είναι διπλή τη χρησιμοποιούμε 2 φορές!**
- **Αντίστοιχα, αν είχαμε μια τριπλή ιδιοτιμή θα τη χρησιμοποιούσαμε τρεις φορές, κ.ο.κ.**