Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας

Παυλοπούλου Κάλλια

2018-2019

Άσκηση 1

Αν $A, B \in M_{n\times n}$ και ο ένας είναι αντιστρέψιμος, τότε να δείξετε ότι

$$|A \cdot B + I_n| = |B \cdot A + I_n|$$

Λύση

Έστω ότι Α αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει $\boldsymbol{A^{-1}}$ τέτοιος ώστε $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I}$

- $|\boldsymbol{A \cdot B + I_n}| =$
- $|\boldsymbol{A \cdot B + A \cdot A^{-1}}| =$
- $|\boldsymbol{A \cdot (B + A^{-1})}| =$
- $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B + A^{-1}}| =$
- $|\boldsymbol{B + A^{-1}}| \cdot |\boldsymbol{A}| =$
- $|\boldsymbol{(B + A^{-1}) \cdot A}| =$
- $|\boldsymbol{B \cdot A + A^{-1} \cdot A}| = |\boldsymbol{B \cdot A + I_n}|.$
- Όμοια δείχνω αν ο Β είναι αντιοτσρέψιμος.

Άσκηση 2 (εύρεση αντιστρόφου)

Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας εάν υπάρχει:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in R\,.$$

- **Λύση**

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο εύρεσης αντιστρόφου:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ \boxed{5} & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 5\gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{-6} & a-5 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 + 6\gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a-11 & 6 & -17 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - \gamma_2}$$

$$\boxed{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{a-11} & 6 & -17 & 1 \end{array}\right)}$$

Στο σημείο αυτό διακρίνουμε περιπτώσεις:

- **Αν α=11**

τότε ο πίνακας δεν αντιστρέφεται .

- **Αν α≠11**

τότε συνεχίζουμε τις γραμμοπράξεις με $\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{\alpha-11}\gamma_3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{-1} & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{\alpha-11} & \frac{-17}{\alpha-11} & \frac{1}{\alpha-11} \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2+\gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \boxed{2} & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1+\frac{6}{\alpha-11} & -2+\frac{-17}{\alpha-11} & \frac{1}{\alpha-11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{\alpha-11} & \frac{-17}{\alpha-11} & \frac{1}{\alpha-11} \end{array}\right) \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1-2\gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1-\dfrac{12}{\alpha-11} & 3+\dfrac{34}{\alpha-11} & \dfrac{-2}{\alpha-11} \\ 0 & 1 & 0 & 1+\dfrac{6}{\alpha-11} & -2+\dfrac{-17}{\alpha-11} & \dfrac{1}{\alpha-11} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{6}{\alpha-11} & \dfrac{-17}{\alpha-11} & \dfrac{1}{\alpha-11} \end{array}\right)$$

Μοναδιαίος

Αντίστροφος A^{-1}

Άσκηση 3 (ομογενές σύστημα 3×4)

Να λυθεί το σύστημα: $$\left\{\begin{array}{c} 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

Λύση:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας σταθερών όρων 3×1 του συστήματος, (γενική μορφή $m \times 1$ διαστάσεων)

Πίνακας συντελεστών του συστήματος, διάστασης 3×4 (γενική μορφή $m \times n$ διαστάσεων)

Κάθε γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι ο γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος (αναγμένος) κλιμακωτός.

***** Πολύ σημαντική πρακτική αξία!**

Αναγωγή σε ανηγμένο κλιμακωτό

(R=reduced row echelon form, when zeros below + above pivots 1)

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ \boxed{2} & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ \boxed{3} & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 3\gamma_1}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{2}\gamma_2}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 2\gamma_2}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_2}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
R = & \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Rank (A) το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών

Rank of A= the number of pivots=2

<u>2 pivots columns</u>

<u>Free columns:</u>

Αντιστοιχούν στους ελεύθερους αγνώστους-ελεύθερες μεταβλητές x_2, x_4

$$
\begin{aligned}
&Matrix\ A \in M^{m\times n}\ (m\ rows, n\ columns) \\
&r = Rank\ of\ A \\
&\quad = number\ of\ pivot \\
&\quad = number\ of\ pivots\ variables \\
&\quad\ (\beta\alpha\sigma\iota\kappa\epsilon\varsigma\ \mu\epsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\epsilon\varsigma) \\
&n - r = number\ of\ free\ variables \\
&\qquad (\epsilon\lambda\epsilon\acute{\upsilon}\theta\epsilon\rho\epsilon\varsigma\ \mu\epsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\epsilon\varsigma)
\end{aligned}
$$

Ανάγεται στο ισοδύναμο σύστημα 3×4

- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_3 = \qquad -2x_4 \\ 0 = 0 \end{Bmatrix}$$

- Άρα,

- $\begin{Bmatrix} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_3 = \qquad\quad -2x_4 \end{Bmatrix}, \delta\eta\lambda\alpha\delta\eta$

- $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in R.$

Σύνολο λύσεων συστήματος

- Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος αποτελείται από τα διανύσματα της μορφής :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in R.$$

- Δηλαδή είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Δηλαδή το σύνολο λύσεων παράγεται από τα δύο αυτά διανύσματα.

Άσκηση 4
(μη ομογενές σύστημα 3×3, μία και μοναδική λύση)

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \end{cases}$ (S)

Λύση:

- Επαυξημένος Πίνακας: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array}\right]$

- Ο γραμμοισοδύναμος είναι $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

rankA=3=rank του επαυξημένου πίνακα

- Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την διατεταγμένη τριάδα

στο R^3 : $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Άσκηση 5 (μη ομογενές σύστημα 3×4)

- Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} u + 2v + 3w + z = 3 \\ \quad v - w + 2z = 4 \\ u + 3v + 2w + 3z = 7 \end{cases}$ (S1)

- Λύση:

- Επαυξημένος Πίνακας: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right]$

- **Γραμμοισοδύναμος με**

$$\begin{array}{cccccc} u & v & w & z & & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

rankA=r=2=rank του επαυξημένου πίνακα

Αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές u,v

Αντιστοιχούν στις ελεύθερες μεταβλητές w, z

n-r= 4-2=2=πλήθος ελεύθερων μεταβλητών

Άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με

$$\begin{cases} 1u + 0v + 5w - 3z = -5 \\ 0u + 1v - 1w + 2z = 4 \\ 0u + 0v + 0w + 0z = 0 \end{cases}$$

(S1'), δηλαδή με το

- $$\begin{cases} 1u + 0v = -5 + 5w + 3z \\ 0u + 1v = 4 + 1w - 2z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Σύνολο λύσεων:

Όλα τα διανύσματα που γράφονται στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-5w+3z \\ 4+w-2z \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$w, z \in R.$$

Άσκηση 6 (σύστημα 3×3-αδύνατο)

- Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} u + 2v - 3w = 0 \\ 2u + 4v - 2w = 2 \\ 3u + 6v - 4w = 3 \end{cases}$ (S2)
- Λύση:
- Επαυξημένος Πίνακας $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{array}\right]$
- Γραμμοισοδύναμος με $\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$

rankA=2≠rank του επαυξημένου πίνακα

- Άρα το αρχικό σύστημα είναι γραμμοισοδύναμο με το σύστημα
- $$\begin{cases} 1u + 2v + 0w = 3/2 \\ 0u + 0v + 1w = 1/2 \\ 0u + 0v + 0w = 1/2 \end{cases} \qquad \text{(S2')}$$

- Από την Τρίτη εξίσωση συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι <u>αδύνατο</u>! Άρα δεν έχει λύση.

<u>Άσκηση 7 (σύστημα $3 \times 5 - \boldsymbol{απειρες\ λυσεις}$)</u>

- **Να λυθεί το σύστημα:** $\begin{cases} u + 2v - w + 3z + x = 2 \\ 2u + 4v - 2w + 6z + 3x = 6 \\ -u - 2v + w - z + 3x = 4 \end{cases}$ **(S3)**
- **<u>Λύση:</u>**
- **Επαυξημένος πίνακας** $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right]$

- Γραμμοισοδύναμος πίνακας $\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right]$

Αντιστοιχούν στις ελ. μεταβλητές v, w

- Άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με
- $\begin{cases} 1u + 2v - w + 0z + 0x = 3 \\ 0u + 0v + 0w + 1z + 0x = -1 \\ 0u + 0v + 0w + 0z + 1x = 2 \end{cases}$ (S2’), δηλαδή με το
- $\begin{cases} u = 3 - 2v + w \\ z = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ (S2’) με $v, w \in R$

Ορίζουμε ελεύθερους αγνώστους τις μεταβλητές v, w , δηλ. να παίρνουν αυθαίρετες τιμές.

Έτσι, η u είναι συνάρτηση των v, w .

- Άρα έχουμε άπειρες λύσεις, τις:

- $$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2v+w \\ v \\ w \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + v \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v, w \in R$$

Άσκηση 8 (για λύση)

- Αν λ μία παράμετρος $(\lambda \in R)$, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda+1)x + y + z = 1 \\ x + (\lambda+1)y + z = \lambda \\ x + y + (\lambda+1)z = \lambda^2 \end{cases}$$

Υπόδειξη: Να υπολογίσετε την ορίζουσα και να διακρίνετε περιπτώσεις για το λ.

$$detA = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \cdot (\lambda+3).$$

Άσκηση 9 (για λύση)

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}, \alpha \in R .$$

Άσκηση 10 (για λύση)

Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in R$, να λυθεί το επόμενο γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + \lambda y - z = 2} \\ \boldsymbol{2x - y + \lambda z = 5} \\ \boldsymbol{x + 10y - 6z = \mu} \end{cases} .$$